ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 8 JUIN 1936.

PRÉSIDENCE DE M. JEAN PERRIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Ministre de l'Éducation nationale** adresse ampliation du décret en date du 29 mai 1936, portant approbation de l'élection que l'Académie a faite de M. **Paul Portier** pour occuper dans la Section de Médecine et Chirurgie la place vacante par le décès de M. *Charles Richet*.

Il est donné lecture de ce décret.

Sur l'invitation de M. le Président, M. **Paul Portier** prend place parmi ses Confrères.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale les télégrammes par lesquels le **Gouvernement de la République de l'Équateur** remercie l'Académie de la part qu'elle a prise aux cérémonies qui ont lieu à Quito pour célébrer le deuxième Centenaire de l'arrivée dans cette ville de la *Mission géodésique française* conduite par La Condamine, Bouguer et Godin, dont les bustes viennent d'être inaugurés.

ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE. — *Sur un procédé radioélectrique de calcul des régimes transitoires.* Note de M. **André Blondel**.

La grande complication des calculs numériques des régimes transitoires par les méthodes connues conduit à rechercher si on pourrait calculer par points la courbe de régime au moyen de quadratures effectuées par des procédés automatiques. Dans ce qui suit, on considérera le cas le plus compliqué, celui de l'introduction brusque d'une force électromotrice $E \sin \Omega t$

ou $E\cos\Omega t$ dans un circuit défini par son admittance isochrone $A(j\omega)$ en fonction d'un spectre de pulsations $\omega = 2\pi f$, correspondant à des fréquences f variant de $-\infty$ à $+\infty$. En général on peut admettre que cette admittance s'exprime par un rapport de deux fonctions entières qu'on peut développer en parties réelles et imaginaires sous la forme suivante:

$$(1)\qquad A(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)} = P(|\omega|) + j\omega Q(|\omega|).$$

Le circuit étant supposé dissipatif d'énergie, la fonction $\varphi(z)$, en appelant z une variante complexe $(z = m + j\omega)$, ne peut avoir que des racines à partie réelle m négative. Le problème se ramène à l'étude de l'introduction brusque de $Ee^{j\Omega t}$, qu'on sait traiter dans la méthode des résidus par l'intégrale de Cauchy

$$(2)\qquad I(t) = \frac{E}{2j\pi}\int_c \frac{A(z)e^{zt}}{z - j\Omega}\,dz,$$

effectuée dans le plan des z complexes le long d'un cercle C ayant l'origine pour centre et un rayon assez grand pour entourer tous les pôles de $A(z)$ (tous situés à gauche de l'axe des imaginaires) et le pôle $j\Omega$ situé sur cet axe. On doit supposer ici que la fonction sous le signe intégral satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle est convergente quand z tend vers l'infini; 2° elle est nulle pour $t = 0$, origine du temps pour le phénomène physique (il suffit pour cela qu'elle soit nulle à ce moment sur le demi-cercle situé à droite de l'axe des imaginaires; 3° pour $t > 0$, elle doit être nulle sur l'autre demi-cercle de façon que l'on puisse remplacer le contour circulaire par l'axe des imaginaires interrompu par le petit cercle contournant le pôle $j\Omega$. On peut alors supprimer le pôle en question en faisant sortir de l'intégrale (2) le régime permanent correspondant au pôle, $j\Omega$ soit $A(j\Omega)e^{j\Omega t}$, tout en se retranchant de $A(z)$ l'élément $A(j\Omega)$ qui lui donne naissance, car

$$\int_c \frac{A(j\Omega)}{z - j\Omega}e^{zt} = A(j\Omega)e^{j\Omega t}.$$

On obtient ainsi

$$(3)\qquad I(t) = A(j\Omega)e^{j\Omega t} + \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{A(z) - A(j\Omega)}{\omega - \Omega}e^{zt}\,dz,$$

$$(4)\qquad I(t) = A\ j\Omega\ e^{j\Omega t} + \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(j\omega) - A(j\Omega)}{\omega - \Omega}e^{j\omega t}\,d\omega,$$

en remplaçant l'axe imaginaire par l'axe réel au moyen de la substitution

$z = j\omega$ et $dz = j\,d\omega$. Puis on développera en remplaçant $e^{j\Omega t}$, $A(j\omega)$ et $A(j\Omega)$ par les développements donnés plus haut. En séparant ensuite les parties réelle et imaginaire I′, I″ de I, on obtient en posant

$$(5)\qquad Y_1 = \frac{P(|\omega|) - P(|\Omega|)}{\omega - \Omega},$$

$$(6)\qquad Y_2 = \frac{\omega Q(|\omega|) - \Omega Q(|\Omega|)}{\omega - \Omega},$$

$$(7)\quad I'(t) = E[P(|\Omega|)\cos\Omega t - \Omega Q(|\Omega|)\sin\Omega t)] + \frac{E}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(Y_1 \sin\omega t + Y_2 \cos\omega t)\,d\omega,$$

$$(8)\quad I''(t) = E[P(|\Omega|)\sin\Omega t + \Omega Q(|\Omega|)\cos\Omega t)] + \frac{E}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(Y_2 \sin\omega t - Y_1 \cos\omega t)\,d\omega.$$

Le régime permanent de I′ est défini par la parenthèse, car l'intégrale s'annule pour $t = \infty$; il est égal à $EA(|\Omega|)\cos(\Omega t - \varphi)$ en appelant φ le décalage : $\operatorname{tang}\varphi = \Omega Q(|\Omega|)/P(\Omega)$. Pour I″ le régime permanent obtenu de même est égal à $EA(|\Omega|)\sin\Omega t$. Comme d'autre part $A(z)$ a pour propriété par hypothèse de donner une valeur nulle à l'intégrale $\int_c \frac{A(z)}{z - j\Omega}dz$ (correspondante à $t = 0$), les composantes réelles et imaginaires doivent s'annuler, donc $I'(0) = 0$ et $I''(0) = 0$. (7) et (8) sont donc les deux solutions correspondantes respectivement à l'application brusque de $E\cos\Omega t$ et de $E\sin\Omega t$ au circuit d'admittance $A(j\omega)$.

Les fonctions à réintégrer, $Y_1 \sin t\omega$ et $Y_1 \cos t\omega$, $Y_2 \sin t\omega$, $Y_2 \cos t\omega$ sont fonction seulement de ω et tout revient à la multiplication des courbes Y_1 et Y_2 par une série de courbes de sin $(t\omega)$ et cos $(t\omega)$ rapportées aux mêmes abscisses. On pourra remplacer avantageusement cette intégration graphique laborieuse par une *intégration radioélectrique* d'une onde porteuse sinusoïdale entretenue, modulée proportionnellement à l'admittance correspondante Y_1 ou Y_2. A cet effet, on applique au moyen de piles photoélectriques des potentiels variables, respectivement proportionnels à l'onde porteuse et à la modulation, à la grille de commande et à la grille suppresseuse d'une lampe pentode à deux grilles, et on mesurera au moyen d'un coulombmètre la quantité totale d'électricité résultant de l'intégration du courant produit. La grille suppresseuse donne en fonction du potentiel de polarisation une variation de courant pratiquement linéaire : la grille de commande de même, mais seulement au delà d'une valeur suffisante de son potentiel v_0. De même les piles photoélectriques suivent une loi linéaire à partir d'un certain éclairement minimum ε_0.

On découpera par exemple une feuille opaque en papier noir suivant le contour de la courbe Y_1 (ou Y_2) en conservant opaque la partie au-dessus du contour et limitant la partie découverte à une droite parallèle à l'axe des abscisses de Y_1, et placé au-dessous de cet axe, à une distance suffisante pour que la pile photoélectrique reçoive par la fente un éclairement toujours $> \varepsilon_0$ pour satisfaire à la condition linéaire. De même la fonction représentant une sinusoïde (d'amplitude constante) sera limitée en haut par le contour découpé dans un écran opaque et en bas par un bord rectiligne tracé à une distance suffisante pour obtenir plus que ε_0. Les diagrammes de Y_1 (ou Y_2) et $\sin t\omega$ (ou $\cos t\omega$) doivent avoir tous la même longueur et chaque sinusoïde doit contenir dans cette longueur un nombre entier de périodes.

On enroulera les deux écrans à fenêtres ainsi préparés sur les surfaces de deux cylindres transparents, tournant chacun autour d'un filament incandescent rectiligne, tangentiellement à un écran opaque percé d'une fente fine parallèle à l'axe de rotation; le flux de lumière traversant cette fente sera concentré (comme dans le cinéma sonore) par une lentille appropriée qui la concentre sur l'ouverture de la pile photoélectrique correspondante p_1 (ou p_2). Les axes des deux cylindres seront reliés par des engrenages à rapport (entier) variable. Par exemple si les abscisses de Y_1 s'étendent de 0 à 10000 périodes, une sinusoïde d'une seule période tournant à la même vitesse correspond à $t = 1/10000^e$ sinusoïde. Pour $t = 1$ seconde on pourra employer une sinusoïde de périodes 100 fois plus courtes, tournant 100 fois plus vite, attaquant le cylindre de Y_1 par un engrenage à démultiplication $1/100^e$. Le courant de la plaque de la pentode traversera soit un compteur de quantité, soit, si la vitesse de rotation est très grande, un galvanomètre à longue période donnant une déviation constante pendant chaque tour et proportionnelle au courant moyen. Pour les mesures à faire en remplaçant les sinusoïdes par les cosinusoïdes correspondantes, il suffira de décaler le cylindre de la sinusoïde d'un quart de période.

Mais, pour tenir compte des potentiels additionnels constants des grilles et des éclairages additionnels des piles photoélectriques correspondantes, on doit en fait remplacer le simple produit des deux fonctions, $Y_1 \sin t\omega$ par exemple, par le produit de ces deux fonctions augmentées chacune d'une ordonnée constante R_1 et S_1 respectivement, ce qui donne

$$I'(t) = \frac{E}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [(R_1 + Y_1)(S_1 + \sin\omega t)] + \frac{E}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (R_2 + \varphi_2)(C_2 + \cos\omega t).$$

Considérons par exemple la première intégrale, au second membre, le terme $R_1 \sin t\omega$ du produit donnera lieu à aucune déviation sensible du compteur. L'intégrale du produit parasite $S_1 Y_1$ peut-être éliminée facilement en faisant une seconde mesure après avoir remplacé le potentiel variable de la grille modulant $\sin t\omega$ par sa valeur moyenne S_1. Ce résultat s'obtient en substituant la fenêtre ondulée qui produit l'éclairement de la pile photoélectrique correspondante par une fenêtre rectangulaire limitée à l'axe de la sinusoïde, éclairement moyen correspondant à S, c'est-à-dire à $\omega = 0$. On corrigerait de même la seconde intégrale.

Quand la force électromotrice introduite est constante E, il suffit de faire $\Omega = 0$ dans (γ), qui devient

$$I(t) = EP(|\Omega|) + \frac{E}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{P(|\Omega|) - P(0)}{\omega}\sin\omega t\, d\omega + Q(|\Omega|)\cos\omega t\, d\omega\right].$$

Plus simplement, on pourra appliquer le calcul radioélectrique à la solution indiquée par Carson (*Electric Circuit Theory*, p. 178)

$$I(t) = \frac{2}{\pi}E\int_{0}^{+\infty}\frac{P(|\omega|)}{\omega}\sin\omega t\, d\omega.$$

Mais tous les calculs théoriques sont pénibles et bien moins puissants pour l'étude des régions transitoires que les méthodes expérimentales directes (oscillographiques), dont les développements sont presque illimités.

OCÉANOGRAPHIE. — *Sur la présence de l'or dans l'eau de mer.* Note de M. GEORGES CLAUDE.

On sait que de nombreux auteurs ont recherché l'or dans l'eau de la mer et que les résultats de ces recherches ont été très divers suivant les expérimentateurs. Les uns, comme Haber, n'en ont jamais trouvé ; d'autres ont au contraire trouvé des quantités atteignant 10, 20 et jusqu'à 50^{mg} par mètre cube.

La variabilité de ces résultats a porté certains auteurs à admettre que la teneur en or de la mer serait essentiellement fonction de la richesse des côtes ou des fonds sous-marins au voisinage desquels est puisée l'eau essayée. De fait, il semble que les chiffres les plus élevés aient été obtenus sur les côtes californienne et australienne.

D'autre part, les plus récents procédés d'extraction qu'on a indiqués

paraissent assez efficaces (¹) pour qu'on puisse arriver à traiter toute l'eau qui passerait dans une usine Claude-Boucherot placée en ces régions favorisées, et les teneurs signalées dans ces parages seraient telles que, même en ne recueillant que le cinquième de l'or, il en résulterait un supplément de revenu important par rapport au prix d'établissement de l'usine. On trouverait donc là un argument supplémentaire important pour la réalisation immédiate de telles usines, malgré le profond marasme industriel de notre époque.

On conçoit que j'aie tenu à me documenter d'une façon plus précise à ce sujet. Grâce à l'amabilité de M. Romano, j'ai pu installer à bord du vapeur de charge *San José*, faisant précisément le service de la côte nord-américaine du Pacifique, un appareil approprié.

Un cylindre de $0^{m},20$ de diamètre et de $0^{m},60$ de long a été en partie rempli de pyrite de Saint-Bel bien exempte d'or, en morceaux de la grosseur moyenne d'une noisette et complété, suivant les indications de M. Glazunov, de manière à retenir l'or qui pourrait se détacher de la pyrite en légères paillettes. Ce cylindre a été placé dans une dérivation du circuit d'alimentation du condenseur du bateau, en amont de celui-ci et en série avec un compteur d'eau et un robinet de réglage du débit. La circulation d'eau de mer, réglée sur place par le chef mécanicien du bateau à 1^{m^3} à l'heure, correspondait à un débit spécifique approximatif de $30 m^3/h$ par mètre carré de section de la matière, correspondant à une perte de charge très faible. Elle a été maintenue à cette valeur pendant tout le trajet du bateau sur la côte californienne, à l'aller et au retour, la distance moyenne de la côte étant voisine de 15 milles. Pendant le séjour dans les ports, la circulation était arrêtée pour éviter le passage d'eau polluée. La quantité totale d'eau traitée a été de 168^{m^3}.

De son côté, la quantité de pyrite employée était de 25^{kg}.

Dès le retour du *San-José*, le 5 avril, une analyse a été faite sur une prise de 500^{g}.

Or le résultat a été aussi net que possible, l'or était en proportion trop faible pour pouvoir être dosé, bien que la précision des méthodes d'analyse employées eût permis de doser dans ces matières $0^{g},2$ à la tonne.

En faisant l'hypothèse, conforme aux constatations de M. Glazunov,

(¹) Voir en particulier la communication de A. Glazunov au 8ᵉ Congrès de Chimie industrielle, juillet 1928.

qu'au débit considéré, la pyrite précipite seulement le cinquième de l'or, il résulte de ces essais, effectués dans des conditions aussi voisines que possible de ce que serait une exploitation industrielle réelle, que la quantité d'or présente dans ces eaux californiennes, à cette distance de la côte, serait inférieure à $0^{mg},1$ par mètre cube.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Le paradoxe de d'Alembert aux vitesses supersoniques.* Note de M. **Dimitri Riabouchinsky.**

Appliquons la théorie des mouvements supersoniques presque uniformes, développée dans des Notes précédentes [1], à l'étude de la résistance ondulatoire des fluides. En posant

$$(1) \qquad \theta + ja\varepsilon = A(1 - jc)\Psi(\varphi_1 + ja\psi_1) \qquad (\Psi = \Psi_1 + j\Psi_2),$$

où c est une constante arbitraire, on a

$$(2) \qquad \theta = f_1(\varphi_1, a\psi_1) = A[+\ \Psi_1(\varphi_1, a\psi_1) - c\Psi_2(\varphi_1, a\psi_1)],$$

$$(3) \qquad a\varepsilon = f_2(\varphi_1, a\psi_1) = A[-c\Psi_1(\varphi_1, a\psi_1) +\ \Psi_2(\varphi_1, a\psi_1)],$$

Ψ_1 et Ψ_2 étant respectivement des fonctions paire et impaire de $a\psi_1$.

Admettons que l'équation (1) détermine le mouvement d'un fluide autour d'un corps P limité par un contour S symétrique par rapport à la vitesse q_0 à l'infini. Sur le contour S on peut poser $\Psi_2 = 0$, et par conséquent, en raison des équations (2) et (3),

$$(4) \qquad \varepsilon = \frac{q - q_0}{q_0} = -\frac{c}{a}\theta = -\frac{c}{a}\frac{dy}{dx}.$$

La résistance du corps P peut être calculée d'après la formule

$$(5) \qquad R = \int_{-l_1}^{l_1} 2(p - p_0)\frac{dy}{dx}dx = 2\rho_0 q_0^2 \frac{c}{a}\int_{-l_1}^{l_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

En appliquant la formule d'Euler, on trouve comme équation du profil et comme coefficient de résistance d'un corps de résistance minima, pour un volume donné,

$$\frac{y}{l_2} = \pm\left(1 - \frac{x^2}{l_1^2}\right), \qquad C_x = \frac{R}{\rho q_0^2 l_2} = \frac{16}{3}\frac{c}{a}\frac{l_2}{l_1},$$

(1) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 889 et 1389.

$2l_1$ étant la longueur et $2l_2$ la section médiane du corps. Ce corps est donc limité par deux arcs de paraboles symétriques par rapport à l'axe oy. Le rapport $l_2 : l_1$ étant très petit par définition, on peut aussi dire que le corps de résistance ondulatoire minima est limité par deux arcs de cercles.

Le rapport ε devant rester constamment très petit et le coefficient de résistance C_x ne pouvant dépasser une certaine limite, par exemple celle qui est assignée par la formule de Rayleigh, il en résulte que le rapport $c : a$, figurant dans les équations (4) et (5), doit être de la forme

$$\frac{c}{a} = F(a),$$

où la fonction F, qui dépend en général de la forme du corps, reste finie et déterminée pour toutes les valeurs de a, y compris la valeur zéro. En première approximation la fonction $F(a)$ peut être calculée en appliquant une théorie que j'ai développée antérieurement ([1]).

La théorie de la résistance aux vitesses supersoniques de J. Ackeret ([2]), basée sur l'équation $\varphi = q_0 x + f(x - ay)$, correspond à la valeur unité du paramètre c figurant dans les formules données ci-dessus. La résistance, qu'on obtient en posant dans l'équation (5) $c = 1$, croît au-dessus de toute limite lorsque a tend vers zéro. La cinématique des mouvements ondulatoires, correspondant à la valeur $c = 1$, développée par Ackeret, avait été traitée d'une façon similaire par Joukowsky ([3]) dans une étude publiée en 1909 sur le mouvement d'un bateau en eau peu profonde. La similitude des résultats obtenus par Ackeret et Joukowsky est une conséquence de l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible.

L'équation (1) détermine un champ de vitesses permanent sur lequel vient se greffer un système d'ondes divergentes dont les extrémités adjointes au corps sont continuellement régénérées. Les photographies des projectiles à bout effilé et le moulage des pressions autour d'un pareil projectile, réalisé ([4]) en utilisant les données fournies par la méthode interférentielle de E. et L. Mach, mettent en évidence une onde en fer à cheval au devant du projectile. J'ai observé dans mon appareil de l'analogie

---

([1]) *Mémorial de l'Artillerie Française*, 2, fascicule 3, 1923, p. 709, formule (11).

([2]) *Helvetia Physica Acta*, 1, fascicule 5, 1928, p. 301-322.

([3]) *Œuvres*, 2, fascicule 5, p. 23-27, Moscou, 1932. L'équation (18) du profil d'un corps de résistance minima que Joukowsky donne dans son Ouvrage diffère de celle qui figure dans la présente Note.

([4]) C. Cranz, *Lehrbuch der Ballistik*, 3, p. 403, fig. 39; Berlin, 1927.

hydraulique, qu'en communiquant une accélération négative au projectile, comme cela a effectivement lieu pour les projectiles en vol libre, les ondes frontales se détachent de la pointe et viennent se placer à une petite distance au devant de cette dernière.

Si l'on pose, dans l'équation (1), $c=0$, on trouve que ε s'annule sur la surface S du corps. Cette dernière devient, par conséquent, une surface de vitesses et de pressions constantes et la résistance R devient nulle. Les points de pression maxima sont à l'intérieur du fluide. Dans les mouvements supersoniques le paradoxe de d'Alembert se présente donc sous ce curieux aspect.

Prenons comme exemple le mouvement déterminé par l'équation

$$\theta + ja\varepsilon = -\mathrm{A}\,w \exp(-w^2), \qquad w = \varphi_1 + ja\psi_1.$$

Le profil du corps de résistance nulle, ou bien celui de la plage d'eau morte, correspondant à ce mouvement, est défini comme suit :

$$\psi_1 = 0, \qquad x_1 = \varphi_1, \qquad y_1 = \pm \frac{1}{2}\mathrm{A}\exp(-\varphi_1^2).$$

En connexion avec cette question, je tiens à mentionner aussi la suivante. Considérons le mouvement

$$\theta + ja\varepsilon = (\mathrm{A}_1 \sin w + \mathrm{A}_2 \sin 2w + \ldots) \exp(-\mathrm{B}^2\omega^2),$$

qui exprime un système ondulatoire jouissant de propriétés qui se rapprochent beaucoup de celles d'un *projectile* de résistance nulle. On ne saurait utiliser de pareils ondes-projectiles pour mettre en évidence la vitesse relative du système qui les projette ou les reflète par rapport au milieu continu ambiant.

COMMISSIONS.

Par la majorité absolue des suffrages, MM. **H. Le Chatelier** et **P. Janet** sont réélus, M. **R. Bourgeois** est élu membre du Conseil de la *Fondation Loutreuil* pour les années 1936, 1937 et 1938.

Par la majorité absolue des suffrages, MM. **Ch. Fabry**, **A. Caquot**, pour la Division des Sciences mathématiques; MM. **A. d'Arsonval**,

L. **Bouvier**, pour la Division des Sciences physiques; MM. G. **Charpy**, L. **Guillet**, pour la Division des Applications de la Science à l'Industrie, sont élus membres de la Commission qui, sous la présidence de M. le Président de l'Académie, dressera une liste de candidats à la place vacante par le décès de M. *Jean Rey*.

Par la majorité absolue des suffrages, M. H. **Deslandres** est réélu, M. E. **Borel** est élu membre de la Commission de la *Maison de l'Institut de France à Londres*.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Faune de France. 30. *Cestodes*, par Ch. Joyeux et J.-G. Baer. (Présenté par M. L. Bouvier.)

M. le **Ministre de l'Éducation nationale** invite l'Académie à lui présenter une liste de deux candidats à la *Chaire de Paléontologie* du Muséum national d'Histoire naturelle.

(Renvoyé à la Section de Minéralogie.)

M. **Jean Piveteau** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la *Chaire de Paléontologie* du Muséum national d'Histoire naturelle.

M. le **Ministre de l'Éducation nationale** invite l'Académie à lui désigner un de ses Membres, qui fera partie du Conseil d'administration de la *Caisse nationale de la Recherche scientifique*.

La **Société des Amis de la Maison natale de Pasteur** invite l'Académie à se faire représenter à l'ouverture au public de la *Maison Paternelle de* Pasteur, à Arbois, le 21 juin 1936.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur le problème des rencontres.* Note de M. **Edgar Baticle**, présentée par M. Émile Borel.

M. Louis Bachelier m'a fait observer, au sujet de ma Note du 2 mars 1936, que l'espérance mathématique que j'avais donnée pour le cas de μ séries de n boules n'était pas conforme à celle calculée par de Montmort. Après examen j'ai reconnu qu'une erreur s'était glissée dans l'expression des termes connus du système (1) de ma Note précitée.

Il n'y a en effet été envisagé que *k rangs* fixés d'avance, alors que ce qu'il faut dénombrer, c'est le nombre de manières de se fixer d'avance *k rencontres*, plusieurs d'entre elles pouvant se trouver sous le même rang.

Appelant α_μ^x le nombre d'arrangements de μ objets x à x, il y a $c_\mu^x \alpha_\mu^x$ manières différentes de se fixer x rencontres de même rang : il y a, en effet, c_μ^x manières de réserver x places dans les μ qui peuvent avoir le même rang, et à chaque ensemble de x places ainsi réservées correspondent autant de rencontres qu'il y a arrangements x à x de μ boules. D'autre part, les rencontres fixées d'avance peuvent appartenir à j rangs différents ($j \leq n$) et il y a α_n^j manières de considérer j rangs. Mais celles où les rencontres de même rang sont en nombre égal ne doivent être comptées qu'une fois. De sorte que s'il y a p rangs avec x rencontres, q rangs avec y rencontres, r rangs avec z rencontre, etc., le nombre total de manières de se fixer k rencontres sera

$$\Sigma'(C_\mu^x \alpha_\mu^x)^p (C_\mu^y \alpha_\mu^y)^q (C_\mu^z \alpha_\mu^z)^r \ldots \frac{\alpha_n^j}{p!\, q!\, r! \ldots},$$

avec les conditions

$$p + q + r + \ldots = j,$$
$$px + qy + rz + \ldots = k.$$

Quant au nombre total de groupements dans lesquels k rencontres sont fixées d'avance, terme connu des équations en $X_1 X_2 \ldots$ il est égal à l'expression ci-dessus multipliée par $(\mu n - k)!$

L'espérance mathématique du joueur qui toucherait 1 par rencontre est, ainsi que je l'ai montré, le quotient par $\mu n'$ du terme connu de l'équation aux X correspondant à $k = 1$. On trouve μ, qui est bien le résultat de de Montmort.

Pour $\mu = 1, 2, 3, 4$, et $n = 2, 3$, on a les probabilités de non-rencontres suivantes :

n.	$\mu=1$.	2.	3.	4.
2	1/2	1/6	1/20	1/70
3	1/3	1/9	1/30	1/105

On peut remarquer que si les séries de 2 et 3 boules avaient été placées dans des urnes distinctes, les probabilités respectives de non-rencontre auraient été

Pour $n=2$..............	1/4	1/8	1/16
Pour $n=3$..............	1/9	1/27	1/81

THÉORIE DES MATRICES. — *Fonctions holomorphes de matrice.* Note (1) de M. **Salvatore Cherubino**, présentée par M. Élie Cartan.

On peut donner une définition des fonctions holomorphes (ou analytiques) de matrice, tout à fait analogue à la définition des fonctions monogènes d'une variable complexe, de la façon suivante :

Soient A une algèbre complexe de matrices d'ordre $n>1$, contenant l'identité, et $x=s+t$, $y=\sigma+\tau$ deux éléments de A, dont s, σ sont les parties hermitiennes, t, τ les parties semi-hermitiennes. Si y est une fonction de x, définie en A pour x variable dans un ensemble $\mathfrak{J}$ de A limité et parfait, on a

$$\sigma=\sigma(s,\,t),\qquad \tau=\tau(s,\,t),$$

fonctions définies pour s, t variables dans les ensembles $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, parfaits et limités eux aussi, correspondant à $\mathfrak{J}$.

Supposons, pour nous dégager de complications formelles, que A soit commutative. On peut alors introduire deux unités symboliques j_1, j_2 satisfaisant aux conditions

$$(1)\qquad j_1^2=j_2^2=j_1,\qquad j_1 . j_2=j_2 . j_1=j_2,$$

moyennant quoi on sépare les parties hermitienne et semi-hermitienne de chaque matrice en posant

$$x=sj_1+tj_2=j_1s+j_2t;\qquad y=\sigma j_1+\tau j_2=j_1\sigma+j_2\tau,$$

et après quoi les (1) nous permettent de traduire les conditions de permutabilité d'un produit (2) en écrivant

$$(2)\qquad xy(s\sigma+t\tau)j+(s\tau+t\sigma)j_2=yx=(\sigma s+\tau t)j_1+(\tau s+\sigma t)j_2.$$

---

(1) Séance du 2 juin 1936.

(2) Voir ma Note des *Atti Acc. Peloritana*, Messina, **37**, 1935-XIII, p. 299, nos **1**, **2**.

Les parties hermitienne et semi-hermitienne du produit $xy = yx$ vont ainsi être séparées tout de suite.

Encore, il faut remarquer que, bien que les matrices de A soient complexes, on peut considérer A dans le corps réel, car la multiplication par le nombre complexe $\alpha + i\beta$ coïncide avec la multiplication par la matrice $\alpha I + \beta J$, I étant l'identité et $J = iI$.

En résumé, bien que l'expression ne soit pas précise, nous dirons que nous venons d'établir une algèbre commutative à deux unités j_1, j_2, opérant sur A, dans le corps réel.

Dans cette pseudo-algèbre on peut supposer vérifiée, par $y = y(x)$, la définition des fonctions analytiques de matrice de M. Scheffers [1] ou bien celle des fonctions à dérivation totale de M. Spampinato [2] et, en profitant de la réductibilité de cette algèbre, on est conduit à établir la définition suivante :

On dit que $y = \sigma + \tau$ est une fonction holomorphe de $x = s + t$ variable en $\mathfrak{J}$, lorsque :

1° *σ et τ sont, en $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, deux fonctions à différentielles totales, dont les dérivées partielles sont soumises aux conditions*

$$\sigma'_s = \tau'_t, \qquad \sigma'_t = \tau'_s\,;$$

2° *les deux premières dérivées donnent une matrice hermitienne, les secondes une matrice semi-hermitienne et leur somme est en* A.

Par conséquent l'on a

$$dy = d\sigma + d\tau = (\sigma'_s + \tau'_s)(ds + dt) = (\tau'_t + \sigma'_t)(ds + dt),$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\sigma}{\partial s}j_1 + \frac{\partial\tau}{\partial s}j_2 = \frac{\partial\tau}{\partial t}j_1 + \frac{\partial\sigma}{\partial t}j_2 = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

La commutativité de A n'est pas nécessaire, car la définition précédente pourrait être donnée *a priori* sans introduire les unités symboliques j_1, j_2. Il est cependant essentiel de séparer, dans chaque élément de A, les parties hermitienne et semi-hermitienne qui jouent le rôle des parties réelle et imaginaire d'une variable complexe. D'autre part la commutativité sert à continuer l'analogie avec la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe.

Toute fonction rationnelle et toute série convergente de puissances d'une

---

(1) *Comptes rendus*, **116**, 1893, p. 1114, 1242.

(2) *Rend. Lincei*. **21**, 1935-XIII, p. 621, 683.

matrice, dont les coefficients appartiennent eux aussi à A, algèbre commutative, est holomorphe. Les fonctions holomorphes de matrice, dans une algèbre commutative, vérifient en particulier les deux théorèmes de Cauchy, celui de Morera, et leurs conséquences, pourvu que l'ensemble $\mathcal{J}$ soit astreint à des conditions convenables, qui sont ordinairement remplies.

GÉOMÉTRIE. — *Propriétés harmoniques générales des involutions unicursales d'ordre n.* Note [1] de M. **Léon Pomey**, présentée par M. Léon Lecornu.

1. Commençons par généraliser la définition des centres harmoniques. On donne, sur une unicursale Γ, n points distincts arbitraires a_i, de paramètres $\theta_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, et un nombre quelconque $(h-1)$ de points arbitraires P_i, de paramètres $\lambda_i (h-1 < n)$ [2]. L'ensemble formé par r_1 points confondus en P_1, r_2 en P_2, ..., r_{h-1} en P_{h-1} sera appelé le groupement $(P_1/r_2, P_2/r_1, \ldots, P_{h-1}/r_{h-1})$ ou (P), et r_i sera dit *l'ordre* de P_i. Posons $r_1 + r_2 + \ldots + r_{h-1} = r$, $r_h = n - r_1$ (nous supposons $r < n$).

Soit alors P_h un des r_h points dont le paramètre λ_h satisfait à l'équation

$$\text{(H)} \qquad \Sigma(\lambda_1 - \theta_\alpha)_{r_1}(\lambda_1 - \theta_\beta)_{r_2} \ldots (\lambda_{h-1} - \theta_\mu)_{r_{h-1}}(\lambda_h - \theta_\nu)_{r_h} = 0,$$

où $(\lambda_1 - \theta_\alpha)_{r_1}$ représente le produit de r_1 facteurs de la forme $\lambda_1 - \theta_\alpha$ qui contiennent le même paramètre λ_1 et des paramètres θ_α différents, les paramètres θ_i qui figurent dans les n facteurs $(\lambda_1 - \theta_\alpha)_{r_1}(\lambda_2 - \theta_\beta)_{r_2} \ldots (\lambda_h - \theta_\nu)_{r_h}$, étant tous distincts; la somme Σ s'étend à tous les termes analogues à celui qui est écrit et qui ont des valeurs différentes.

Définition générale des harmoniques. — Nous dirons que chaque point P_h, qui satisfait à la condition (H), *est un harmonique d'ordre r_h du groupement* (P) *par rapport aux n points a_i*; et que l'ensemble des r_h harmoniques P_h constitue *le $r^{\text{ième}}$ groupe harmonique (ou groupe polaire) g_r, d'ordre r_h, du groupement* (P) *par rapport aux a_i*.

Nota. — Dans le cas particulier où $r_2 = r_3 = \ldots = r_{h-1} = 0$ (et où Γ est une droite), on retombe sur la définition ordinaire des centres harmoniques d'ordre $(n - r_1)$ d'un point P_1 par rapport aux n points a_i. [Pour donner alors à l'équation (H) sa forme habituelle, il suffit d'y mettre en facteur le produit $(\lambda_1 - \theta_1)(\lambda_1 - \theta_2) \ldots (\lambda_1 - \theta_n)$.]

---

[1] Séance du 2 juin 1936.

[2] Les P_i sont distincts des a_i. Le cas où des points a_i seraient confondus ensemble (avec des points P_i ou non) se traite de même.

2. Appelons I_n l'involution d'ordre n (et de rang $n-1$) qui admet les n points a_i pour points n-uples. Considérons toutes les n-ades de I_n qui comprennent le groupement fixe (P); leurs r_h derniers points homologues engendrent une involution analogue I_{r_h} [1].

Théorème I. — *Chacun des harmoniques P_h, d'ordre r_h, du groupement* (P) *par rapport aux n points a_i est un des r_h points, d'ordre r_h, qui forment avec le groupement* (P) *une n-ade de I_n.*

Corollaire II. — *Chacun des harmoniques P_h est aussi un des points r_h-uples de I_{r_h}.*

3. Appelons S un des systèmes linéaires de courbes algébriques, à $(n-1)$ paramètres, capables d'engendrer I_n; et $s(P)$ le système linéaire à (r_h-1) paramètres formé par les courbes C_P de S qui contiennent le groupement (P), c'est-à-dire qui ont toutes avec Γ un contact d'ordre r_i-1 en chaque point P_i $(i=1, 2, \ldots, h-1)$.

Corollaire III. — *Chaque point P_h appartient à une courbe C_P qui a en ce point P_h un contact d'ordre r_h-1 avec* Γ.

Cette image géométrique des harmoniques montre d'abord que leur définition est indépendante de la représentation propre adoptée pour l'unicursale Γ. En outre, comme nous l'avons annoncé [2], elle rend évidentes leurs propriétés dont voici les principales.

4. Théorème IV. — *Si r_h est impair, le groupe harmonique g_r forme un groupe de points homologues de I_{r_h} et ses r_h points P_h appartiennent (avec l'ordre 1) à une même courbe du système $s(P)$: chacun de ces points P_h est l'harmonique d'ordre 1 (par rapport aux a_i) du groupement formé par l'ensemble de* (P) *et des r_h-1 autres points P_h (comptés chacun avec l'ordre 1).*

Théorème V. — *Le groupe harmonique g_r forme une r_h-ade de chaque involution d'ordre r_h qui a pour points multiples les points $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r_h}$ d'une r_h-ade quelconque de I_{r_h}; donc chaque point P_h est l'harmonique d'ordre 1 du groupement formé par les r_h-1 autres (pris chacun avec l'ordre 1) par rapport aux r_h points $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r_h}$. Et de même, si $h=n$ et $r_1=r_2=\ldots=r_{h-1}=1$ (d'où $r_h=1$), chacun des n points donnés a_i est l'harmonique d'ordre 1 du groupement formé par les $(n-1)$ autres (tous d'ordre 1) par rapport aux n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$.*

---

[1] Dans un exposé d'où serait bannie toute relation métrique, la propriété formulée dans ce théorème I pourrait, inversement, être prise pour définition des harmoniques de (P). La propriété qu'ils ont de vérifier (H) en serait une conséquence.

[2] *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1396.

5. Décomposons à notre guise le groupement (P) en un nombre quelconque $K(\leqq r)$ de groupements partiels :

$$\left(\frac{P_1}{\rho_1}, \frac{P_2}{\rho_2}, \ldots, \frac{P_{h-1}}{\rho_{h-1}}\right) \quad \text{ou} \quad (p),$$

$$\left(\frac{P_1}{\rho'_1}, \frac{P_2}{\rho'_2}, \ldots, \frac{P_{h-1}}{\rho'_{h-1}}\right) \quad \text{ou} \quad (p'); \qquad \left(\frac{P_1}{\rho''_1}, \frac{P_2}{\rho''_2}, \ldots, \frac{P_{h-1}}{\rho''_{h-1}}\right) \quad \text{ou} \quad (p''), \quad \ldots,$$

certains des ordres ρ_i, ρ'_i, ρ''_i, ... pouvant à volonté être nuls pourvu que l'on ait

$$\rho_1 + \rho'_1 + \rho''_1 + \ldots = r_1, \quad \rho_2 + \rho'_2 + \rho''_2 + \ldots = r_2, \quad \ldots, \quad \rho_{h-1} + \rho'_{h-1} + \rho''_{h-1} + \ldots = r_{h-1},$$

Posons

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{h-1} = \rho, \qquad \rho'_1 + \rho'_2 + \ldots + \rho'_{h-1} = \rho', \qquad \ldots.$$

Théorème VI. — *Si l'on considère le $\rho^{\text{ième}}$ groupe harmonique g_ρ (d'ordre $n - \rho = \rho_h$) du groupement (p) par rapport aux n points a_i; puis le $\rho'^{\text{ième}}$ groupe harmonique $g'_{\rho'}$ (d'ordre $\rho_h - \rho'$) du groupement (p') par rapport aux ρ_h points de g_ρ; ensuite le $\rho''^{\text{ième}}$ groupe harmonique $g''_{\rho''}$ du groupement (p'') par rapport aux ρ'_h points de $g'_{\rho'}$, etc., le dernier groupe harmonique obtenu comprendra toujours le point P_h défini au théorème* I *comme harmonique de* (P), *quels que soient le nombre* K *et les nombres ρ_i, ρ'_i, ...; et quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les opérations; en outre, on arriverait à une conclusion semblable*, mutatis mutandis, *si l'on recommençait des opérations analogues en échangeant les rôles du point (P_h/r_h) (d'ordre r_h) et d'un point quelconque (P_i/r_i) du groupement* (P).

Cette *loi générale de réciprocité* des harmoniques comprend comme cas particulier à la fois celle de Bobillier et celle de Plücker, ainsi que la loi de succession des centres harmoniques des divers ordres. De plus elle montre que g_r coïncide *avec le groupe polaire mixte (ou mêlé) du groupement* (P); *ce groupe polaire mixte remplit donc la condition* (H) *et possède les propriétés précipitées de g_r.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une inégalité de Hobson.* Note [1] de M. **René Lagrange**, présentée par M. Émile Borel.

On doit à Hobson [2] l'extension de l'inégalité de Stieltjes aux fonctions de Legendre généralisées sous la forme

$$(1)\qquad \frac{|Q_n^{\pm m}(\cos\theta)|}{\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}|P_n^{\pm m}(\cos\theta)| < \frac{\Gamma(n\pm m+1)}{\Gamma(n+1)\sin^m\theta}\sqrt{\frac{2}{n\sin\theta}}$$

$$(m \geqq 0,\ n\geqq 1,\ n-m+1>0,\ 0<\theta<\pi),$$

le facteur $\sqrt{2}$ au second membre pouvant être remplacé par 1 lorsque m est un nombre entier. En particulier, pour $m=0$ on a

$$(2)\qquad \frac{|Q_n(\cos\theta)|}{\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}|P_n(\cos\theta)| < \frac{1}{\sqrt{n\sin\theta}} \qquad (n\geqq 1,\ 0<\theta<\pi).$$

La méthode de Hobson permet d'obtenir des inégalités plus avantageuses. Rappelons la représentation de la fonction de Legendre-Hobson par l'intégrale définie

$$(3)\quad Q_n{}^m(z) = e^{-m\pi i}\frac{2^{-m}\cos m\pi\,\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\eta^{-m-n}(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}}{(\eta^2-1)^{-m+\frac{1}{2}}}\int_0^1\frac{u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-m}}{\left(1+\frac{u}{\eta^2-1}\right)^{-m+\frac{1}{2}}}du,$$

valable pour $m+1/2>0$, $n-m+1>0$, où $\eta=z+\sqrt{z^2-1}$ avec $|\arg\sqrt{z^2-1}|<\pi$. Sur la coupure $-1\leqq z\leqq 1$, Hobson adopte les définitions

$$(4)\quad \begin{cases} e^{m\pi i}Q_n^m(\cos\theta) = \dfrac{1}{2}\left[e^{-\frac{m\pi i}{2}}Q_n^m(\cos\theta+0i)+e^{\frac{m\pi i}{2}}Q_n^m(\cos\theta-0i)\right], \\ -i\pi e^{m\pi i}P_n^m(\cos\theta) = \quad e^{-\frac{m\pi i}{2}}Q_n^m(\cos\theta+0i)+e^{\frac{m\pi i}{2}}Q^m(\cos\theta-0i). \end{cases}$$

Dans ces conditions, à $z=\cos\theta\pm 0i$ correspondent

$$\eta=e^{\mp i\theta},\qquad \sqrt{z^2-1}=e^{\pm\frac{i\pi}{2}}\sin\theta,\qquad \eta^2-1=\pm 2i\sin\theta\, e^{\pm i\theta}.$$

Il vient alors

$$1+\frac{u}{\eta^2-1} = 1-\frac{u}{2}\mp\frac{iu\cot\theta}{2}$$

---

[1] Séance du 11 mai 1936.

[2] *Proc. of the London Math. Society*, 2e série, 30, 1932, p. 239-267.

et, par conséquent,

$$(5)\qquad |Q_n^{-m}(\cos\theta \pm o i)| \leqq \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos m\pi\right|}{\sqrt{2\pi\sin\theta}} \times \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-m}\left|1-\frac{u}{2}\mp\frac{iu\cot\theta}{2}\right|^m}{\sqrt{\left|1-\frac{u}{2}\mp\frac{iu\cot\theta}{2}\right|}}\,du.$$

Dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$, on peut écrire

$$1-\frac{u}{2} \leqq \left|1-\frac{u}{2}\mp\frac{iu\cot\theta}{2}\right| = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{(1-u)\sin^2\theta+\frac{u^2}{4}} \leqq \frac{1-\frac{u}{2}}{\sin\theta} \leqq \frac{1}{\sin\theta}.$$

Donc, si $m \geqq 0$, $n-m+1/2 > 0$, on peut adopter $1-u$ comme limite inférieure de $1-u/2$ et majorer ainsi l'intégrale au second membre de (5) par

$$\frac{1}{\sin^m\theta}\int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-m-\frac{1}{2}}\,du = \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\sin^m\theta},$$

tandis que si $m \geqq 0$, $n-m+1 > 0$, on doit se contenter de la limite inférieure $1/2$, au lieu de $1-u$, ce qui donne la valeur majorante

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin^m\theta}\int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-m}\,du = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n-m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sin^m\theta}.$$

On a ainsi l'inégalité

$$(6)\qquad \sin^m\theta\,|Q_n^{-m}(\cos\theta \pm o i)| \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2\sin\theta}}\left\{\frac{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(n-m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\right\}$$

$$(m \geqq 0),$$

suivant que $n-m < -1/2$ ou -1. Grâce à l'inégalité

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma\left(n+\alpha+\frac{1}{2}\right)} < \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \left(n > 0,\ \alpha > \frac{1}{4}\right),$$

on peut remplacer (6) par

$$(7)\qquad |\sin^m\theta\,Q_n^{-m}(\cos\theta \pm o i)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}}\left\{\frac{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+1)}\right\}$$

$$(n > 0;\ m \geqq 0),$$

suivant que $n < m > -1/2$ ou -1. La même valeur majorante vaut pour

$$\sin^m\theta\, Q_n^{-m}(\cos\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}\sin^m\theta\, P_n^{-m}(\cos\theta).$$

En particulier, on a

$$(8)\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,|\,Q_n(\cos\theta)\,| \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|\,P_n(\cos\theta)\,| < \frac{1}{\sqrt{n\sin\theta}} \qquad (n>0),$$

qui donne une valeur majorante $\sqrt{2}$ fois plus faible que (2).

Enfin, grâce à l'identité

$$\frac{e^{-m\pi i}\, Q_n^m(z)}{\Gamma(n+m+1)} = \frac{e^{m\pi i}\, Q_n^{-m}(z)}{\Gamma(n-m+1)},$$

on déduit de (6)

$$(7)\qquad |\sin^m\theta\, Q_n^m(\cos\theta \pm 0i)\,| < \sqrt{\frac{\pi}{n\sin\theta}}\,\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)}$$
$$(m \geqq 0;\; n>0;\; n>m-1),$$

la même valeur majorante étant valable pour

$$\sin^m\theta\, Q_n^m(\cos\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}\sin^m\theta\, P_n^m(\cos\theta).$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'équation des vibrations d'une plaque encastrée.* Note de M. **Alexandre Weinstein**, présentée par M. Henri Villat.

Soit $\lambda_1^2, \lambda_1^2, \ldots$ $(0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots)$ le spectre de l'équation qui se présente dans la théorie des vibrations d'une plaque encastrée

$$(1)\qquad \Delta\Delta w - \lambda^2 w = 0,$$

valable dans un domaine S, la fonction w satisfaisant aux conditions aux limites

$$(2)\qquad w = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{dw}{dn_e} = 0$$

(n_e désigne la normale extérieure) sur la frontière C de S. Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots$ $(\omega_1 \leqq \omega_2 \leqq \ldots)$ le spectre de l'équation des vibrations d'une membrane

$$(4)\qquad \Delta u + \omega u = 0 \quad \text{dans S}; \qquad u = 0 \quad \text{sur C}.$$

M. Courant a démontré les inégalités suivantes [1] :

(5) $$\lambda_n \geqq \omega_n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Nous nous proposons de remplacer (5) par des inégalités plus précises

(6) $$\lambda_n \geqq \rho_n \geqq \omega_n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

en introduisant le spectre d'un problème auxiliaire que nous définirons tout à l'heure. Comme application de (6) nous calculerons des limites inférieures et supérieures de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 dans le cas où S est un carré.

Définition de ρ_n. — Posons

$$\mathrm{I}(w)=\int_S\int(\Delta w)^2\,dx\,dy, \qquad \mathrm{H}(w)=\int_S\int w^2\,dx\,dy.$$

Soient $p_1(x, y), \ldots, p_m(x, y)$ m fonctions harmoniques dans le domaine S, prenant des valeurs arbitrairement données sur le contour C. Soient $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_{n-1}(x, y)$, $(n-1)$ fonctions arbitraires dans S. Considérons le problème suivant :

Problème. — *Déterminer le minimum* σ_n^2 *de l'expression* $\mathrm{I}(w)/\mathrm{H}(w)$ *pour toutes les fonctions* w *satisfaisant aux conditions suivantes :*

(7) $$w=0 \quad \text{sur C},$$

(8) $$\int_C \frac{dw}{dn_e} p_k\,ds=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m),$$

(9) $$\int_S\int w\varphi_j\,dx\,dy=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Le minimum σ_n^2 *dépend de* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$. *Le maximum de ce minimum sera désigné par* ρ_n^2. *Il est évident que* ρ_n dépend des p_k [2].

On aura $\rho_n=\lambda_n$ *si l'on substitue dans notre problème la condition* $dw/dn_e=0$ *aux conditions* (8). *De même on aura* $\rho_n=\omega_n$ *en supprimant les conditions* (8). *On a donc, d'après un principe utilisé par M. Courant,* $\lambda_n \geqq \rho_n \geqq \omega_n$.

Applications. — Soit S le carré $|x| \leqq \pi/2$, $|y| \leqq \pi/2$. Posons

$$m=2, \quad p_1=\cosh x\cos y+\cos x\cosh y, \quad p_2=\cosh x\cos y-\cos x\cosh y.$$

On aura pour les ω_n et les ρ_n les valeurs suivantes :

(10) $$\omega_1=2, \quad \omega_2=5, \quad \omega_3=5, \quad \omega_4=8, \quad \omega_5=10, \quad \omega_6=10, \quad \omega_7=13, \quad \ldots.$$

(11) $$\rho_1>3.6, \quad \rho_2=5, \quad \rho_3=5, \quad \rho_4=8, \quad \rho_5>12.7, \quad \ldots.$$

---

[1] R. Courant, *Math. Zeitschrift*, 15, 1922, p. 195.

[2] Pour calculer ρ_1 il faut supprimer (9).

De plus on aura (¹)

(12) $3,6 < \lambda_1 < 3,65$; $7,1 < \lambda_2 = \lambda_3 < 7,2$.

Pour calculer λ_4 considérons le problème suivant :

Déterminer le minimum μ^2 *de* $\mathrm{I}(w)/\mathrm{H}(w)$ *pour les fonctions* w *satisfaisant aux conditions suivantes :* $w = dw/dn_c = 0$ *sur* C, $w = 0$ *sur les segments* $x = 0$, $|y| \leqq \pi/2$ *et* $y = 0$, $|x| \leqq \pi/2$, w *étant une fonction impaire de* x *et de* y. On démontre aisément que μ^2 est égal à un des nombres propres λ_n^2.

La méthode que j'ai indiquée précédemment (²) donne l'inégalité $10,6 < \mu < 11,6$. En comparant ce résultat avec la suite (11) on déduit que μ^2 est égal à λ_4^2. On a donc les inégalités

$$10,6 < \lambda_4 < 11,6.$$

Signalons que les inégalités (5) permettraient seulement d'affirmer que μ^2 est égal à l'une des valeurs propres λ_4^2, λ_5^2, λ_6^2 sans pouvoir préciser à laquelle, tandis que notre méthode montre qu'il s'agit de λ_4^2.

Je me propose de revenir ultérieurement sur les démonstrations ainsi que sur l'extension de ces résultats.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la nature diophantique du problème d'unicité du développement trigonométrique.* Note de Mlle **Nina Bary**, présentée par M. Émile Borel.

1. *Ensembles parfaits non denses.* — On sait que tout ensemble parfait P non dense situé dans le segment fondamental $\sigma^0 = [0, 2\pi]$ peut être obtenu de la manière suivante. On exclut d'abord dans σ^0 un intervalle δ^0 contigu à P ; il reste deux segments $\sigma_i^{(1)} (i = 1, 2)$ non exclus. Puis on exclut dans chaque $\sigma_i^{(1)}$ un intervalle $\delta_i^{(1)}$ contigu à P ; il reste quatre segments $\sigma_i^{(2)} (i = 1, 2, 3, 4)$ non exclus. On opère sur chacun d'eux comme on a opéré sur σ^0 et ainsi indéfiniment. Les segments $\sigma_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^k)$ obtenus à la $k^{\text{ième}}$ opération sont dits *de rang k*.

L'ensemble parfait P est dit *symétrique* si, quel que soit un entier

(¹) A. Weinstein, *Comptes rendus Soc. Physique de Genève*, séance du 7 mai 1936 (*sous presse*).

(²) A. Weinstein, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 107 ; *Journ. London Math. Soc.*, 10, 1935, p. 184 ; *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 32, 1936, p. 96 ; S. Tomotika, *Aeron. Institute*, Tokyo, Imp. University, n° 129, 1935, p. 299.

positif k donné, les longueurs des segments $\sigma_i^{(k)}$ de rang k sont égales deux à deux. Dans ce cas, les intervalles $\delta_i^{(k)}$ sont aux centres des $\sigma_i^{(k)}$ et ont la longueur commune $\delta^{(k)}$ indépendante de l'indice i. Pour que la mesure de P soit nulle, il faut et il suffit que $2^k.\sigma^{(k)}$ tende vers zéro lorsque k croît indéfiniment; ici $\sigma^{(k)}$ est la longueur commune des segments $\sigma_i^{(k)}$ de rang k.

L'ensemble parfait P est dit *gauche* s'il n'est pas symétrique. Désignons par $\lambda_i^{(k)}$ la *longueur relative* de $\delta_i^{(k)}$, c'est-à-dire le rapport $\delta_i^{(k)}/\sigma_i^{(k)}$ des longueurs de $\delta_i^{(k)}$ et $\sigma_i^{(k)}$. Soit $\lambda^{(k)}$ la plus grande des longueurs relatives $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_{2^k}^{(k)}$. Si P est symétrique, les longueurs relatives $\lambda_i^{(k)}$, k étant fixe, sont égales deux à deux, et l'on a $\lambda^{(k)} = \delta^{(k)}/\sigma^{(k)}$.

L'ensemble parfait P est dit *ensemble à rapport constant* si la longueur relative $\lambda_i^{(k)}$ est indépendante des deux indices i et k; dans ce cas, nous avons $\lambda_i^{(k)} = \lambda$, où λ est une constante positive absolue inférieure à 1. La mesure de tout ensemble parfait à rapport constant est nulle.

2. *Ensembles d'unicité.* — Un ensemble de points E est dit *ensemble* (U) (ensemble d'unicité) si toute série trigonométrique qui converge vers zéro en dehors de E a tous ses coefficients nuls. Dans le cas contraire, E est dit *ensemble* (M) (ensemble de multiplicité).

On sait que M. Menchoff a formé, le premier, un ensemble parfait (M) de mesure nulle : c'est l'ensemble symétrique P pour lequel on a $\lambda^{(k)} = 1/k$. Depuis j'ai cherché à étendre le résultat de M. Menchoff aux ensembles parfaits gauches P pour lesquels $\lambda^{(k)} \to 0$ lorsque $k \to +\infty$. Certaines restrictions que j'ai imposées sur la partition des intervalles $\delta_i^{(k)}$ ont été écartées récemment par M. Verblunsky. D'autre part les ensembles (U) parfaits ont été formés indépendamment et en même temps par M. Rajchman et par moi. Les ensembles (U) parfaits de M. Rajchman sont particulièrement simples : pour qu'un ensemble parfait P soit un ensemble (U), il suffit que la transformation homothétique P_n de P, dont le rapport d'homothétie est un entier positif n, étant enroulée sur un cercle de rayon 1, admette un arc contigu τ_n qui ne tend pas vers zéro lorsque n croît indéfiniment. De tels ensembles sont appelés par M. Rajchman *ensembles* (H). En particulier, l'ensemble trichotomique connu de Cantor construit pour le segment $[0, 2\pi]$ est un ensemble (H). On serait tenté de croire que tout ensemble P à rapport constant est toujours un ensemble (U). Nous verrons que cette hypothèse est fausse.

3. *Problème de l'analyse diophantique.* — La question se pose alors de trouver des critères nécessaires et suffisants pour qu'un ensemble parfait P soit un ensemble (U) [ou bien (M)]. Pour reconnaître qu'un ensemble

parfait donné P est un ensemble (M), on construit habituellement une fonction $f(x)$ constante dans chaque intervalle $\delta_i^{(k)}$ contigu à P, qui n'est pas une constante dans $[0, 2\pi]$ et dont les coefficients de Fourier a_n et b_n sont de la forme ε_n/n, où $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Or, l'approximation faite habituellement pour le calcul des valeurs absolues est grossière. Pour avoir les a_n, b_n avec précision, il faut faire un calcul des sommes de M. H. Weyl, c'est-à-dire faire appel aux lois diophantiques.

Le premier problème qu'on rencontre sur cette voie est le suivant : *étant donné un nombre positif* θ, $\theta < 1$, *reconnaître si la fonction* $\varphi(n)$ *égale au nombre des termes de la suite* $(n\theta)$, $(n\theta^2)$, ..., $(n\theta^k)$, ... *supérieurs en valeur absolue à un nombre positif* ε *fixe tend vers l'infini lorsque l'entier positif n croît indéfiniment.* Ici (x) est la différence x et l'entier le plus proche de x.

4. *Critère diophantique.* — Voici une réponse au problème posé : si le nombre θ est rationnel et de forme différente de $1/m$, m étant un entier positif, la fonction $\varphi(n)$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Comme une conséquence, nous avons la proposition :

Théorème. — *Un exemple parfait* P *symétrique à rapport constant* λ *est un ensemble* (M), *si* $\lambda = p/q$ (*fraction irréductible*) *et si* $p \neq q-1$ *et* $p \neq q-2$. *Si* $p = q-1$ *ou* $p = q-2$, *l'ensemble* P *est un ensemble* (U) [*et même* (H)].

On voit ainsi que les ensembles (U) à rapport constant sont peu nombreux (l'ensemble de Cantor correspond au cas $p = 1$, $q = 3$).

Mais la question beaucoup plus importante se pose alors de savoir : *la transformation homothétique d'un ensemble* (U) *est-elle aussi un ensemble* (U)? Si le rapport de l'homothétie est rationnel, la réponse est sûrement positive.

MÉCANIQUE. — *Application d'une théorie synthétique de la relativité aux orbites des planètes.* Note [1] de M. **Jean Hely**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Nous avons exposé [2] le principe d'une théorie synthétique de la relativité; il est intéressant d'en faire l'application à la recherche de certaines propriétés des orbites des planètes.

---

(1) Séance du 2 juin 1936.

(2) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1659.

La fonction de force gravifique φ créée par le Soleil dans l'espace qui l'environne est fonction d'un certain produit scalaire r, dépendant lui-même d'un quadrivecteur-unité parallèle au quadrivecteur $\Sigma e^{-r/B} m_0 (\overline{ds}/ds)_{m_0}$.

En raison de la décroissance rapide du coefficient $e^{-r/B}$ avec la distance, les masses des corps éloignés du Soleil (planètes, étoiles) n'interviennent pas dans la somme quadrivectorielle qui précède. Celle-ci est donc parallèle au quadrivecteur-déplacement de l'ensemble des seules particules constituant le Soleil, et il en est de même de notre quadrivecteur-unité. Choisissons donc un système de coordonnées (x, y, z, t) tel que la quatrième composante dudit quadrivecteur soit seule différente de zéro et que par ailleurs $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ en tout point. Le Soleil est immobile dans ce système de coordonnées (puisque les trois composantes spatiales de son quadrivecteur-déplacement s'y trouvent nulles par hypothèse) et la quatrième composante de notre quadrivecteur-unité est nécessairement $1/c$. Le quadrivecteur r qui joint le Soleil à un point de l'espace qui s'en trouve à une distance spatiale d et à une hyperdistance $c^2 t^2 - d^2$ nulle a de même une quatrième composante t égale à d/c. Dans ces conditions, le produit scalaire r du quadrivecteur-unité (dont trois composantes sont nulles) par le quadrivecteur $\overline{r}$ est égal à $c^2 \times 1/c \times d/c = d$, et la fonction de force φ devient $KM_0/c^2 d + 3(KM_0/c^2 d)^2 = m/r + 3m^2/r^2$, en posant $KM_0/c^2 = m$ (M_0 désignant la masse du Soleil) et $d = r$.

Raisonnons à présent dans le plan d'une trajectoire planétaire, et adoptons les coordonnées polaires r et θ. Le mouvement de la planète est tel que l'intégrale $\int ds\sqrt{1-2\varphi} = \int \sqrt{(c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2)(1-2\varphi)}$ soit stationnaire. Posons

$$dS = \sqrt{(c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2)(1-2\varphi)} \quad \text{et} \quad \frac{dS}{dr} = \sqrt{\left(c^2 \frac{dt^2}{dr^2} - 1 - r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}\right)(1-2\varphi)}.$$

$\int ds$ sera stationnaire si

$$\frac{d}{dr}\,\frac{\partial \frac{dS}{dr}}{\partial \frac{dt}{dr}} = \frac{\partial \frac{dS}{dr}}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \frac{dS}{dr}}{\partial \frac{dt}{dr}} = \text{const.},$$

et si de même $\partial(dS/dr)/\partial(d\theta/dr) = \text{const.}$ La première condition s'écrit

$$\frac{2c^2 \frac{dt}{dr}(1-2\varphi)}{2\frac{dS}{dr}} = \text{const.} \quad \text{ou} \quad c^2 \frac{dt}{dS}(1-2\varphi) = Kc$$

et la deuxième

$$\frac{-2r^2\dfrac{d\theta}{dr}(1-2\varphi)}{2\dfrac{dS}{dr}}=\text{const.}\qquad\text{ou}\qquad r^2\frac{d\theta}{dS}(1-2\varphi)=h$$

(ces deux équations divisées membre à membre donnant en outre la deuxième loi de Képler ou loi de des aires $r^2\,d\theta/dt=\text{const.}$). Comme d'autre part

$$\frac{dS^2}{dS^2}=1=\left(c^2\frac{dt^2}{dS^2}-\frac{dr^2}{dS^2}-r^2\frac{d\theta^2}{dS^2}\right)(1-2\varphi)=\left(c^2\frac{dt^2}{dS^2}-\frac{dr^2}{d\theta^2}\frac{d\theta^2}{dS^2}-r^2\frac{d\theta^2}{dS^2}\right)(1-2\varphi),$$

il vient, en remplaçant dans cette égalité dt/dS et $d\theta/dS$ par leurs valeurs,

$$1=\left[\frac{K^2}{(1-2\varphi)^2}-\frac{dr^2}{d\theta^2}\frac{h^2}{r^4}\frac{1}{(1-2\varphi)^2}-\frac{h^2}{r^2}\frac{1}{(1-2\varphi)^2}\right](1-2\varphi)$$

ou

$$1-2\varphi=K^2-\frac{h^2}{r^4}\frac{dr^2}{d\theta^2}-\frac{h^2}{r^2},$$

soit encore, en posant $1/r=u$,

$$1-2\varphi=K^2-h^2\frac{du^2}{d\theta^2}-h^2u^2\qquad\text{ou}\qquad\frac{du^2}{d\theta^2}+u^2=\frac{K^2-1+2\varphi}{h^2}=\frac{K^2-1+2mu+6m^2u^2}{h^2},$$

et enfin, en différentiant par rapport à θ et divisant par $2(du/d\theta)$,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{m}{h^2}+\frac{6m^2u}{h^2}.$$

Cette équation ne diffère de la formule classique de Binet que par le terme $6m^2u/h^2$ qui ne provient lui même que du terme supplémentaire $3m^2u^2$ figurant dans la fonction φ.

Posons maintenant

$$\theta'=\theta\sqrt{1-\frac{6m^2}{h^2}}.$$

Il vient

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\left(1-\frac{6m^2}{h^2}\right)\frac{d^2u}{d\theta'^2}\qquad\text{et}\qquad\left(\frac{d^2u}{d\theta'^2}+u\right)\left(1-\frac{6m^2}{h^2}\right)=\frac{m}{h^2},$$

ou

$$\frac{d^2u}{d\theta'^2}+u=\frac{m}{h^2-6m^2}=\frac{1}{p},\qquad\text{soit}\qquad u=\frac{1\pm e\cos(\theta'-\alpha')}{p}$$

équation d'une ellipse stable si l'on confond θ et θ'.

Quand θ' augmente de 2π, u reprend la même valeur, mais en toute

rigueur θ a augmenté de

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{6m^2}{h^2}}} \# 2\pi\left(1+\frac{3m^2}{h^2}\right) \# 2\pi + \frac{6\pi m}{p}.$$

Le périhélie de la planète par exemple (qui correspond à la plus grande valeur de u) avance donc à chaque révolution du très petit angle $6\pi m/p$, ce qui entraîne finalement, pour la planète Mercure notamment, une progression de 43″ d'angle par siècle.

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ. — *Le problème de Barré de Saint-Venant dans les milieux homogènes parfaitement flexibles.* Note de M. CHARLES PLATRIER, présentée par M. Émile Jouguet.

Soient, dans un milieu en équilibre isotherme M, milieu le plus général homogène parfaitement flexible déformé infiniment peu à partir d'un état naturel $\overline{\overline{T}}(N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3)$ le tenseur tension, $\overline{\overline{e}}(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)$ le tenseur déformation, Δ le déterminant des coefficients de Lamé dans l'expression linéaire de $\overline{\overline{T}}$ en fonction de $\overline{\overline{e}}$ et Δ_{ij} le mineur de Δ obtenu par suppression de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne. Le problème de Saint-Venant concerne un milieu où

$$N_1 = N_2 = T_3 = 0, \qquad N_3 = A + Bz$$

T_1, T_2, A, B étant des fonctions de x et y seulement telles que

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + B = 0.$$

De plus, sur un contour plan donné (L) dont la normale a pour cosinus directeurs $(\alpha, \beta, 0)$,

$$T_2\alpha + T_1\beta = 0.$$

Enfin $\overline{\overline{e}}$ doit satisfaire en tout point aux six conditions d'intégrabilité des déformations

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 e_1}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y} + \dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\right) & \text{(et deux analogues)}, \\ \dfrac{2\,\partial^2 g_1}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial^2 e_3}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 e_2}{\partial z^2} & \text{(et deux analogues)}. \end{cases}$$

Est-il possible dans le milieu (M) de satisfaire à toutes ces conditions et cela à six constantes arbitraires près (a, b, c, l, m, n)?

Pour cela il faut et il suffit que la sixième condition d'intégrabilité soit conséquence des cinq autres, d'où, si ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 désignent trois nombres arbitraires, les huit conditions suivantes imposées aux coefficients de Lamé

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \Delta_{13} = \varpi_1 \Delta_{33}, & \Delta_{14} = \varpi_1 \Delta_{34}, & \Delta_{15} = \varpi_1 \Delta_{35}, \\ \Delta_{23} = \varpi_3 \Delta_{33}, & \Delta_{24} = \varpi_2 \Delta_{34}, & \Delta_{25} = \varpi_2 \Delta_{35}, \\ \Delta_{63} = \varpi_3 \Delta_{33}, & \Delta_{64} = \varpi_3 \Delta_{34}, & \Delta_{65} = \varpi_3 \Delta_{35}, \\ \multicolumn{3}{c}{\varpi_3 \Delta_{43} = \varpi_2 \Delta_{53}, \qquad \varpi_1 \Delta_{43} = \varpi_3 \Delta_{53}.} \end{array}\right.$$

Supposons $(\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_3^2)$ non nul, circonstance la plus fréquente, non nécessaire d'ailleurs, les conditions précédentes peuvent s'écrire

$$(3)\qquad \Delta_{14} = \Delta_{24} = \Delta_{34} = \Delta_{64} = \Delta_{15} = \Delta_{25} = \Delta_{35} = \Delta_{65} = 0$$

et en désignant par ϖ_4, ϖ_5, ϖ_6 trois nouveaux nombres et par μ un coefficient de Lamé, tels que $(\varpi_4 \varpi_5 - \varpi_6^2)$ non nul et

$$(4)\qquad \Delta_{44} = \varpi_4 \Delta_{33}, \qquad \Delta_{55} = \varpi_5 \Delta_{33}, \qquad \Delta_{45} = \Delta_{54} = \varpi_6 \Delta_{33}, \qquad \Delta = 2\mu \Delta_{33},$$

la solution du problème de Saint-Venant est alors définie par les relations

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} N_3 = z(ax + by) + mx + by + c, \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} = ax + by, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\varpi_5 T_2 + \varpi_6 T_1) - \dfrac{\partial}{\partial x}(\varpi_6 T_2 + \varpi_4 T_1) - n(\varpi_4 + \varpi_5) \\ \quad = x(b\varpi_1 - a\varpi_3) - y(a\varpi_2 - b\varpi_3), \end{array}\right.$$

avec $T_2 \alpha + T_1 \beta$ nul sur le contour (L).

Conclusions. — 1° La solution de Saint-Venant est valable pour des milieux isothermes (M) parfaitement flexibles caractérisés par 13 coefficients de Lamé indépendants et 13 au plus [en raison des relations (2) à satisfaire par les 21 coefficients de Lamé].

2° Quand $(\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_3^2)$ n'est pas nul, les conditions (3) exigent notamment que ϖ_1 et ϖ_2 soient nuls (¹), c'est-à-dire que, dans de tels milieux (M'), la direction de l'axe des z soit un axe de propagation d'onde plane polarisée longitudinalement.

(¹) P. Painlevé et Ch. Platrier, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*, notation adoptée pour les coefficients de Lamé, pages 333, 378, 399 et suiv.

3° Les milieux, où τ_1, τ_2, σ_1, σ_2, ν_1, ν_2, ρ_1, ρ_2 nuls, sont des milieux (M′) et, parmi ces derniers, se classe le milieu (B) à température constante et à cinq coefficients de Lamé indépendants (λ, λ', μ, μ', μ'') étudié par M. Boussinesq (1).

4° Les tensions dans les milieux (M′) dépendent seulement des rapports des six coefficients numériques (ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4, ϖ_5, ϖ_6); les déformations pour des valeurs données de ces derniers nombres, y dépendent du seul coefficient de Lamé μ et lui sont inversement proportionnelles

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} 2\mu e_3 = \dfrac{2\mu e_1}{\varpi_1} = \dfrac{2\mu e_2}{\varpi_2} = \dfrac{2\mu g_3}{\varpi_3} = \mathrm{N}_3, \\ 2\mu g_1 = \varpi_4 \mathrm{T}_1 + \varpi_6 \mathrm{T}_2, \qquad 2\mu g_2 = \varpi_6 \mathrm{T}_1 + \varpi_5 \mathrm{T}_2. \end{array}\right.$$

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur la stabilité de la double file de tourbillons dans un canal rectiligne.* Note de M. **Imai-Isao**, présentée par M. Henri Villat.

Après Schwarz (2), j'ai étudié la stabilité d'une rue des tourbillons dans un canal rectiligne, par la méthode des petites oscillations. Soit A la file des tourbillons d'intensité $\varkappa_A$ placés en $z_0 + mk$ et B celle de tourbillons $-\varkappa_B$ en $z_1 + nk$, m et n étant des nombres entiers. Soient $y = 0$, $y = h/2$ les coordonnées des parois du canal. Dans ce cas, on peut écrire le potentiel complexe du système (3)

$$f(z) = \frac{\varkappa_A}{2\pi i}\log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z-z_3)} - \frac{\varkappa_B}{2\pi i}\log\frac{\sigma(z-z_1)}{\sigma(z-z_2)},$$

où $\omega = k/2$, $\omega' = i(h/2)$, $z_2 = x_1 + i(h - y_1)$ et $z_3 = x_0 + i(h - y_0)$.

Appelant u_A, v_A et u_B, v_B les vitesses des files A et B, on a

$$u_A = \frac{\varkappa_A}{2\pi}\left[\bar\zeta(2y_0 - h)\right] - \frac{\varkappa_B}{2\pi}\left[-\bar\zeta(y_0 - y_1) + \bar\zeta(y_0 + y_1 - h) - \frac{1}{2}\frac{\bar{\wp}'(y_0 - y_1)}{\wp(x_0 - x_1) + \bar{\wp}(y_0 - y_1)} + \frac{1}{2}\frac{\bar{\wp}'(y_0 + y_1)}{\wp(x_0 - x_1) + \bar{\wp}(y_0 + y_1)}\right]$$

(1) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1652 : Observation de M. Émile Jouguet.

(2) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 824.

(3) Quant aux notations voir Halphen, *Fonctions elliptiques*.

et

$$u_B = \frac{\varkappa_A}{2\pi}\left[-\bar{\zeta}(y_1-y_0)+\bar{\zeta}(y_1+y_0-h)-\frac{1}{2}\frac{\bar{p}'(y_1-y_0)}{p(x_1-x_0)+\bar{p}(y_1-y_0)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\bar{p}'(y_1+y_0)}{p(x_1-x_0)+\bar{p}(y_1+y_0)}\right]-\frac{\varkappa_B}{2\pi}\bar{\zeta}(2y_1-h),$$

$$\frac{v_A}{\varkappa_B}=\frac{v_B}{\varkappa_A}=-\frac{1}{4\pi}p'(x_0-x_1)\left[\frac{1}{p(x_0-x_1)+\bar{p}(y_0-y_1)}-\frac{1}{p(x_0-x_1)+\bar{p}(y_0+y_1)}\right].$$

Pour que le système soit permanent, il faut que l'on ait $v_A = v_B = 0$ et $u_A = u_B$. La première condition donne $p'(x_0 - x_1) = 0$ ou ∞, i. e. $x_1 - x_0 = 0$ ou $k/2$ resp. C'est-à-dire que la configuration permanente doit avoir la disposition symétrique [cas (1)] ou alternée [cas (2)]. Pour abréger, posons $a = y_1 - y_0$, $b = y_1 + y_0$ et $\delta = 0$ ou ω/i correspondant au cas (1) ou (2) resp. Alors on a, après quelques transformations,

$$2\pi u_A = \varkappa_A\bar{\zeta}(b-a-h)-\varkappa_B[-\bar{\zeta}(-a+\delta)+\bar{\zeta}(b-h+\delta)],$$
$$2\pi u_B = \varkappa_A[-\bar{\zeta}(a+\delta)+\bar{\zeta}(b-h+\delta)]-\varkappa_B\bar{\zeta}(b+a-h).$$

D'après la deuxième condition $u_A = u_B$, on obtient

$$\gamma = \frac{\varkappa_B-\varkappa_A}{\varkappa_B+\varkappa_A}=\frac{\bar{p}'(b+\delta)}{\bar{p}'(a+\delta)}.$$

Examinons la stabilité des configurations obtenues plus haut. Soient $p_A + iq_A$, $p_B + iq_B$ les petits déplacements relatifs des tourbillons Z_0 et Z_1. On trouve notamment

$$\frac{d^2}{dt^2}(p_A-p_B)=\lambda^2(p_A-p_B);$$

en posant, pour le cas (1),

$$\lambda^2 = \{\bar{p}(a)-\bar{p}(b)\}$$
$$\times\left[\{\bar{p}(a)-\bar{p}(b)\}(\varkappa_A-\varkappa_B)^2+2\varkappa_A\varkappa_B\left\{\frac{\bar{p}''(b)}{\bar{p}(a)-\bar{p}(b)}+\left(\frac{\bar{p}'(b)}{\bar{p}(a)-\bar{p}(b)}\right)^2\right\}\right],$$

pour le cas (2),

$$\lambda^2 = \left\{\bar{p}\left(a+\frac{\omega}{i}\right)-\bar{p}\left(b+\frac{\omega}{i}\right)\right\}\left[\left\{\bar{p}\left(a+\frac{\omega}{i}\right)-\bar{p}\left(b+\frac{\omega}{i}\right)\right\}(\varkappa_A+\varkappa_B)^2\right.$$
$$\left.+2\varkappa_A\varkappa_B\left\{\frac{-\bar{p}''\left(a+\frac{\omega}{i}\right)}{\bar{p}\left(a+\frac{\omega}{i}\right)-\bar{p}\left(b+\frac{\omega}{i}\right)}+\left(\frac{\bar{p}'\left(a+\frac{\omega}{i}\right)}{\bar{p}\left(a+\frac{\omega}{i}\right)-\bar{p}\left(b+\frac{\omega}{i}\right)}\right)^2\right\}\right].$$

Naturellement $a < b < h - a$; $o < a < h/2$. On sait, d'ailleurs que, pour cet intervalle, on a les relations suivantes :

$$\bar{p}(a) > \bar{p}(b), \qquad \bar{p}\left(a + \frac{\omega}{i}\right) < \bar{p}\left(b + \frac{\omega}{i}\right),$$

$$|\bar{p}'(a)| > |\bar{p}'(b)|, \qquad \bar{p}''\left(a^* + \frac{\omega}{i}\right) = 0 \qquad \left(0 < a^* < \frac{h}{2}\right),$$

$$\bar{p}''(b) > 0, \qquad \bar{p}''\left(a + \frac{\omega}{i}\right) \gtrless 0 \qquad (\text{suivant que } a \lesseqgtr a^*).$$

Cas (1) :

$$|\gamma| = \left|\frac{\bar{p}'(b)}{\bar{p}'(a)}\right| < 1, \qquad \varkappa_A \varkappa_B > 0,$$

donc $\lambda^2 > 0$ i. e. λ est réel; donc l'équilibre est instable.

Cas (2) : 1° $a^* < a < h/2$. Dans ce cas on a toujours

$$\left|\bar{p}'\left(a + \frac{\omega}{i}\right)\right| > \left|\bar{p}'\left(b + \frac{\omega}{i}\right)\right|.$$

Donc $|\gamma| < 1$; et, par suite, $\varkappa_A \varkappa_B > 0$.

2° $0 < a < a^*$ si $a' < b < h - a'$, $|\gamma| < 1$; donc $\varkappa_A x_B > 0$. Si $a < b < a'$ ou $h - a' < b < h - a$, $|\bar{p}'(a + \omega/i)| < |\bar{p}'(b + \omega/i)|$. Donc $|\gamma| > 1$; d'où $\varkappa_A \varkappa_B < 0$. Ici a' est telle que

$$\bar{p}'\left(a + \frac{\omega}{i}\right) = \bar{p}'\left(a' + \frac{\omega}{i}\right) \qquad \left(a^* < a' < \frac{h}{2}\right).$$

Mais, dans le dernier cas, λ^2 est toujours positif, i. e. λ est réel. Donc l'équilibre est instable si $x_A x_B < 0$.

En résumé, pour la double file de tourbillons d'intensités inégales :

1° il y a deux dispositions possibles, l'une symétrique, l'autre alternée;

2° la disposition symétrique est toujours instable, les signes des tourbillons étant contraires dans les deux files;

3° la disposition alternée est instable, si les signes des tourbillons sont les mêmes dans les deux files.

AÉRODYNAMIQUE. — *Influence des limitations d'une veine fluide sur les caractéristiques aérodynamiques des ailes sustentatrices. Vérifications expérimentales.* Note [1] de MM. **A. Toussaint** et **S. Pivko**, présentée par M. Henri Villat.

Nous avons étudié [2] l'influence de la hauteur limitée d'une veine plane guidée et libre sur les caractéristiques aérodynamiques des ailes sustentatrices. Le point essentiel de la méthode exposée consiste en la recherche d'un angle induit $\Delta\alpha = \alpha_{\infty}.m$ dû à la hauteur limitée du courant et à l'influence de la distance (pour la veine libre seulement), et nous admettons que $\Delta\alpha$ calculé au *centre du profil* ($z = 0$), représente l'influence globale pour *tout* profil.

Notre hypothèse arbitraire a nécessité une vérification expérimentale. L'absence d'expériences sur les veines planes guidée et libre de hauteur faible nous a conduit à entreprendre une étude expérimentale spéciale.

Nous avons exécuté nos essais dans une petite soufflerie par aspiration, que nous avons réalisée et mise au point à cet effet. L'aile en essai avait un profil biconvexe symétrique et les caractéristiques suivantes : la corde $l = 18^{cm}$; l'envergure $L = 83^{cm}$; l'épaisseur maximum $e_m = 4^{cm},1$; $\eta e = 0^{cm},114$.

La largeur de la veine était $h = 22^{cm}$, alors l/h 0,818. Les mesures ont été effectuées une fois pour la veine guidée et quatre fois pour la veine libre, pour les distances relatives : $x/h = 0,432$; 0,682; 0,932 et 1,182.

Les polaires et courbes unitaires expérimentales sont représentées sur le diagramme ci-après. Nous avons tracé, à titre de comparaison, sur le même diagramme, la polaire et la courbe unitaire du même profil, essayé dans un courant illimité.

A ces valeurs, obtenues expérimentalement, nous avons appliqué nos corrections, d'après les formules publiées dans les Notes précédentes, avec le coefficient $m = \Delta\alpha/\alpha_{\infty} = 0,17$ pour la veine guidée et égal respectivement à $m = -1,055$; $-0,955$; $-0,915$ et $-0,91$ pour les veines libres en question.

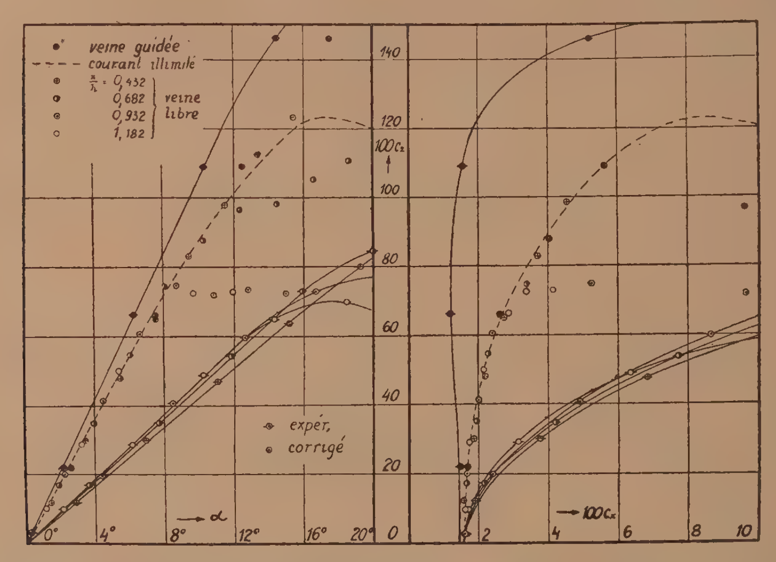
On voit, pour les incidences modérées, une concordance extrêmement

---

[1] Séance du 18 mai 1936.

[2] *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 1753 et 1834.

satisfaisante entre la théorie et expérience, car les petites divergences restent dans les limites des erreurs expérimentales. Il convient de remarquer que notre théorie n'est valable que dans le domaine des incidences modérées, en raison des approximations adoptées. C'est pourquoi les corrections appliquées à des points expérimentaux, situés au voisinage ou au delà du $c_{z\,\max}$ ne peuvent ramener ces points sur les courbes théoriques.



Nous avons calculé le coefficient m pour la veine guidée et pour différentes caractéristiques du profil d'aile ηe et pour différents rapports corde du profil/hauteur de la veine : l/h. Les résultats sont contenus dans le tableau ci-dessous :

ηe.	$l/h = 0,25$.	0,50.	0,75.	1,00.
0...........	$m =$ 0,0128	0,0514	0,1153	0,2052
0,05........	0,0141	0,0566	0,1280	0,2281
0,10........	0,0154	0,0621	0,1398	0,2510
0,15........	0,0170	0,0684	0,1555	0,2800

En ce qui concerne la veine libre, le tableau ci-dessous donne le coefficient $m = m_1 + m_2$ calculé pour $\eta e = 0,1$ et pour les différents rapports l/h et x/h :

$\frac{x}{h}$.	$\frac{l}{h} = 0,25$.	0,50.	0,75.	1,00.
0............	$m = -0,0154$	$-0,0611$	$-0,1355$	$-0,2360$
0,25.........	$-0,4997$	$-0,8882$	$-1,275$	$-1,682$
0,50.........	$-0,3627$	$-0,6432$	$-0,918$	$-1,218$

$\frac{x}{h}$.	$\frac{l}{h}=0{,}25.$	0,50.	0,75.	1,00.
0,75	$m=-0{,}3387$	$-0{,}5982$	$-0{,}852$	$-1{,}127$
1,0	$-0{,}3337$	$-0{,}5882$	$-0{,}839$	$-1{,}110$
∞	$-0{,}3317$	$-0{,}5852$	$-0{,}835$	$-1{,}105$

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Équation de Dirac et théorie du champ électromagnétique.* Note de M. **Bernard Kwal**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous avons attiré [1] l'attention sur la possibilité de déduire à partir des équations de Dirac des équations dont la forme est maxwellienne et qui peuvent servir de base à une théorie quantique du champ électromagnétique microscopique. Nous allons en donner maintenant des détails plus précis et quelques résultats nouveaux.

Tout d'abord nous écrirons l'équation de Dirac en se servant des matrices à 8 lignes et à 8 colonnes et pour cela nous envisagerons une fonction d'onde ψ à 8 composantes $(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4,\ \psi_1^*,\ \psi_2^*,\ \psi_3^*,\ \psi_4^*)$. L'équation qui conduit à la théorie usuelle de l'électron magnétique s'écrit alors de la manière que voici :

$$\text{(I)}\qquad \left(\begin{vmatrix}\alpha_0 & 0\\ 0 & \alpha_0\end{vmatrix}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix}\alpha_k & 0\\ 0 & (\alpha_k)^*\end{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_k}+\begin{vmatrix}i\alpha_4 & 0\\ 0 & (i\alpha_4)^*\end{vmatrix}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\psi=0.$$

En se servant de l'opérateur

$$\begin{vmatrix}0 & \alpha_0\\ \alpha_0 & 0\end{vmatrix}$$

on obtient aisément des équations de forme maxwellienne entre des opérateurs relatifs au champ électromagnétique, équations qui sont les suivantes :

$$\text{(II)}\qquad\begin{cases}\left(\operatorname{rot}{}^1\mathrm{E}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^1\mathrm{H}}{\partial t}-\operatorname{grad}{}^1\varphi+\dfrac{m_0c}{\hbar}{}^2j\right)\psi=0,\\[2mm] \left(\operatorname{div}{}^1\mathrm{H}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^1\varphi}{\partial t}-\dfrac{m_0c}{\hbar}{}^2j_4\right)\psi=0,\\[2mm] \left(\operatorname{rot}{}^1\mathrm{H}-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^1\mathrm{E}}{\partial t}+\operatorname{grad}{}^1\Phi+\dfrac{m_0c}{\hbar}{}^1\mathcal{J}\right)\psi=0,\\[2mm] \left(\operatorname{div}{}^1\mathrm{E}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^1\Phi}{\partial t}+\dfrac{m_0c}{\hbar}{}^2\mathcal{J}_4\right)\psi=0\end{cases}$$

[1] *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 23.

et

$$
\text{(III)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\operatorname{rot}{}^2\mathcal{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\,{}^2 j}{\partial t} - \operatorname{grad}{}^2 j_4 - \frac{m_0 c}{\hbar}\,{}^1\mathrm{H}\right)\psi = 0,\\
&\left(\operatorname{rot}{}^2 j - \frac{1}{c}\frac{\partial\,{}^2\mathcal{J}}{\partial t} + \operatorname{grad}{}^2\mathcal{J}_4 - \frac{m_0 c}{\hbar}\,{}^1\mathrm{E}\right)\psi = 0,\\
&\left(\operatorname{div}{}^2\mathcal{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\,{}^2\mathcal{J}_4}{\partial t} - \frac{m_0 c}{\hbar}\,{}^1\Phi\right)\psi = 0.\\
&\left(\operatorname{div}{}^2 j + \frac{1}{c}\frac{\partial\,{}^2 j_4}{\partial t} + \frac{m_0 c}{\hbar}\,{}^1\varphi\right)\psi = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

en posant

$$
{}^1\mathrm{E}_1 = \begin{vmatrix} 0 & (i\alpha_1\alpha_2)^* \\ i\alpha_1\alpha_2 & 0 \end{vmatrix},\qquad
{}^1\mathrm{E}_2 = \begin{vmatrix} 0 & (-i\alpha_0)^* \\ -i\alpha_0 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
{}^1\mathrm{E}_3 = \begin{vmatrix} 0 & (-i\alpha_2\alpha_3)^* \\ -i\alpha_2\alpha_3 & 0 \end{vmatrix},\qquad
{}^1\mathrm{H}_1 = \begin{vmatrix} 0 & (-i\alpha_3)^* \\ -i\alpha_3 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
{}^1\mathrm{H}_2 = \begin{vmatrix} 0 & (-i\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^* \\ -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 & 0 \end{vmatrix},\qquad
{}^1\mathrm{H}_3 = \begin{vmatrix} 0 & (i\alpha_1)^* \\ i\alpha_1 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
{}^2\mathcal{J}_1 = \begin{vmatrix} 0 & (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^* \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4 & 0 \end{vmatrix},\qquad
{}^2\mathcal{J}_2 = \begin{vmatrix} 0 & (-\alpha_4)^* \\ -\alpha_4 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
{}^2\mathcal{J}_3 = \begin{vmatrix} 0 & (-\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^* \\ -\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & 0 \end{vmatrix},\qquad
{}^2\mathcal{J}_4 = \begin{vmatrix} 0 & (-\alpha_2\alpha_4)^* \\ -\alpha_2\alpha_4 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
{}^2 j_1 = \begin{vmatrix} 0 & (\alpha_3\alpha_4)^* \\ \alpha_3\alpha_4 & 0 \end{vmatrix},\qquad
{}^2 j_2 = \begin{vmatrix} 0 & (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^* \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
{}^2 j_3 = \begin{vmatrix} 0 & (-\alpha_1\alpha_4)^* \\ -\alpha_1\alpha_4 & 0 \end{vmatrix},\qquad
{}^2 j_4 = \begin{vmatrix} 0 & (-\alpha_1\alpha_3\alpha_4)^* \\ -\alpha_1\alpha_3\alpha_4 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
{}^1\varphi = \begin{vmatrix} 0 & (-i\alpha_1\alpha_3)^* \\ -i\alpha_1\alpha_3 & 0 \end{vmatrix},\qquad
{}^1\Phi = \begin{vmatrix} 0 & (i\alpha_2)^* \\ i\alpha_2 & 0 \end{vmatrix}.
$$

Une seconde série d'équations (II) et (III) s'en déduit en appliquant l'opérateur $\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}$.

Les opérateurs j, φ et Φ sont des *opérateurs muets* dont les densités de moyenne sont nulles, ce qui se traduit, en particulier, par l'inexistence des charges et courants magnétiques.

Les équations (II) et (III), qui contiennent toute l'électrodynamique quantique, peuvent s'écrire sous une forme abrégée

$$
\text{(II')}\qquad \vec{\mathrm{H}}\psi = \vec{\mathrm{A}}\,\psi,
$$

$$
\text{(III')}\qquad \overleftrightarrow{\mathrm{H}}\psi = \vec{\mathrm{A}}\psi.
$$

Les opérateurs $\vec{\mathrm{H}}$ et $\overleftrightarrow{\mathrm{H}}$ ont un caractère vectoriel et tensoriel, ce qui les distingue essentiellement de l'opérateur scalaire I, relatif à la dynamique ondulatoire du corpuscule de Dirac.

ÉLECTRICITÉ. — *Générateur ionique donnant un million de volts.* Note de M. **Marcel Pauthenier** et de Mme **Marguerite Moreau-Hanot**, présentée par M. Aimé Cotton.

Description. — Nous avons indiqué (1) le principe d'un générateur ionique de hauts potentiels; depuis lors un appareil de ce genre a été établi et, bien que certains détails de réalisation soient encore imparfaits, le potentiel obtenu atteint le million de volts.

Le conducteur à charger est une sphère de 75^{cm} de diamètre, supportée par deux tubes de verre d'Iéna de $10^{cm},5$ de diamètre intérieur, la longueur efficace d'isolement étant 2^{m}.

L'air chargé de particules solides est entraîné en circuit fermé dans ces tubes avec une vitesse voisine de 60 m/s. Les poussières employées sont des sphérules vitrifiées provenant de l'appareil de dépoussiération d'une centrale à charbon pulvérisé.

L'ioniseur cloisonné est formé d'un tube axial entouré de 6 secteurs de couronne, disposition d'ailleurs défectueuse, que nous nous proposons de remplacer par un faisceau de tubes hexagonaux où le champ sera plus régulièrement réparti. Les fils de cuivre très fins d'abord employés ont été, en raison de leur fragilité, remplacés par des fils d'acier à section carrée. Un espace annulaire d'environ 6^{mm} d'épaisseur est laissé libre autour de l'ioniseur; il n'y a en effet aucun intérêt à ce que les particules voisines des parois prennent une charge; celle-ci ne pourrait que se déposer sur les tubes isolants et y jouer un rôle nuisible. En raison de cette précaution et de la vitesse du courant d'air les tubes de verre restent propres.

Mesure du courant apporté à la sphère. — La disposition peu satisfaisante de l'ioniseur, les arêtes vives qu'il présente aux deux bouts limitent jusqu'à présent à 11 μA, au lieu des 25 μA environ prévus, le courant électrique I apporté à la sphère,

En fonction des deux variables dont on dispose facilement : teneur du gaz en poussières et tension V appliquée au fil, le courant I présente comme il était prévu un maximum très aplati, des deux côtés duquel il s'abaisse assez rapidement. La teneur du gaz en poussières est définie par l'étouffe-

(1) *Comptes rendus*, **201**, 1935, p. 1332.

ment de la décharge (1); la valeur optimum de celui-ci est, dans tous les cas étudiés jusqu'ici, voisine de 1/3, condition réalisée lorsque l'ensemble de l'appareil contient en suspension 15 à 20^g de poussières pour un volume de l'ordre de 300^{dm^3}. Quant à la tension V, elle doit, dans les conditions de nos expériences, correspondre à une émission de 3 à 4 μA par centimètre de fil (7 KV environ pour le fil de cuivre très fin, 11 à 12 KV pour le fil carré).

Nous n'avons pas étudié encore l'influence, sans doute importante, d'autres modifications portant sur la nature du gaz et sur la dimension de l'ioniseur.

Enfin il est évident que le courant I augmente en même temps que la vitesse du courant d'air ou la section des tubes; il est plus économique d'augmenter cette section car la puissance consommée par le ventilateur croît très rapidement avec la vitesse; mais cela oblige à augmenter les trous pratiqués dans le conducteur et par suite les fuites électriques dans leur voisinage. La supression de ces fuites est donc un point essentiel de la question.

Potentiels atteints. — Entre la sphère chargée et une deuxième sphère de même diamètre (75^{cm}), reliée à la terre, nous obtenons des étincelles qui, jusqu'à 650 kV, restent toujours droites, bruyantes, et espacées de 3 secondes au plus dans ce dernier cas. Au delà de ce potentiel, les fuites intervenant, les étincelles sont souvent sinueuses et moins régulièrement espacées, leur longueur a dépassé 54^{cm}, et le potentiel explosif, contrôlé par la méthode de la pastille de platine (2) dépasse le million de volts. Ensuite des étincelles jaillissent vers les parois de la salle.

MESURES ÉLECTRIQUES. — *Sur une importante cause d'erreur dans la mesure des capacités au balistique.* Note de M. **Jean Granier**, présentée par M. Paul Janet.

On sait (3) que la présence d'un condensateur de capacité C dans le circuit d'un galvanomètre donne à l'équipage mobile une inertie apparente supplémentaire CG^2, G étant le rapport de la f. e. m. à la vitesse angulaire.

---

(1) *J. de Phys.*, 6, 1935, p. 257.

(2) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 929.

(3) Voir Paul Janet, *Annales de Chronométrie*, 5, 1935, p. 190-191.

La période d'oscillation est donc augmentée : avec les capacités considérables employées aujourd'hui dans l'industrie, cette perturbation est loin d'être négligeable.

Vérification expérimentale. — Avec un galvanomètre type A. O. P. caractérisé par les constantes suivantes (a, moment d'inertie; c, rapport du couple de torsion à l'angle; R, résistance) :

$$a = 6,15, \qquad c = 18,4,$$
$$G = 2,18.10^{7}, \qquad R = 2,4.10^{12}$$
(unités C. G. S.),

on a trouvé expérimentalement pour la période d'oscillation, en bon accord avec la formule précédente :

	A circuit ouvert.	Fermé sur 10 μF.	Fermé sur 40 μF.
Secondes	3,64	4,6	6,6

Dans ce dernier cas, la période est *presque doublée.*

Si le galvanomètre est employé comme balistique, l'élongation est donnée par la formule

$$\theta = \frac{G}{c} \frac{2\pi}{T} Q$$

Pour une même quantité d'électricité Q, elle est donc en raison inverse de T; or, comme nous venons de l'établir, T dépend de C. Si donc dans la comparaison des capacités on ne tient pas compte de cette variation systématique de la période on commet une erreur qui peut être très importante.

Vérification expérimentale. — Une pile Leclanché débite dans 2 boîtes de résistance R_1 et R_2 montées en série; la capacité étudiée est chargée aux bornes de R_2, puis déchargée dans le galvanomètre AOP précédemment décrit.

Comme capacité on utilise 2 condensateurs *identiques* de 20 μF *environ;* en les montant en série puis en choisissant :

$$R_1 = 9800\,\Omega, \qquad R_2 = 200\,\Omega.$$

on obtient une élongation de 78^{mm} sur une règle graduée placée à 1^{m} de l'appareil; en les montant en dérivation, puis en prenant

$$R_1 = 9950\,\Omega, \qquad R_2 = 50\,\Omega,$$

on obtient une élongation de 52^{mm} seulement.

Or, dans le second cas, la capacité est 4 fois plus grande que dans le

premier cas et la tension de charge 4 fois plus faible; d'après la théorie classique on devrait donc obtenir des élongations identiques. L'expérience montre au contraire que le rapport des élongations (52/78) est égal à l'inverse (4,6/6,6) du rapport des périodes.

Résumé et conclusions. — Si dans les conditions précédentes on mesure un condensateur de 40 microfarads par comparaison avec un étalon de 1 microfarad, sans tenir compte de la variation de période, on trouvera une capacité environ deux fois trop faible. Par contre, si l'on opérait sous des tensions plus élevées en shuntant énergiquement le galvanomètre pour rendre son régime apériodique, on retrouverait la valeur exacte.

Dans la mesure des condensateurs de grande capacité, il faut donc soit tenir compte systématiquement des variations de période, soit utiliser des galvanomètres peu sensibles, à grand moment d'inertie et fortement shuntés.

SPECTROSCOPIE. — *Spectres d'absorption infrarouges et modes de vibration de composés organiques.* Note de M. **Jean Lecomte**, présentée par M. Aimé Cotton.

Avec les spectromètres précédemment décrits ([1]) nous avons relevé, entre les fréquences de 510 et 1450 cm^{-1} environ, les spectres d'absorption d'une trentaine de composés liquides qui répondaient aux formules générales $X\text{-}CH^2\text{-}CH^2\text{-}Y$ et $X\text{-}CH^2\text{-}CH^2\text{-}CH^2\text{-}Y$ et qui n'avaient pas, à notre connaissance, été étudiés en dehors de nous dans cette région. *Les nombreuses bandes d'absorption, qui se trouvent dans presque tous les spectres pour des fréquences inférieures à* 1100 cm^{-1}, *ne s'expliquent que si l'on admet l'existence de plusieurs formes moléculaires.*

I. $X\text{-}CH^2\text{-}CH^2\text{-}Y$. — On sait que les six modes de vibration $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ correspondant à la forme *cis*, tels qu'ils ont été précisés dans une Note précédente ([2]), doivent, dans tous les cas, donner lieu à des bandes d'absorption infrarouges et à des raies Raman. Quant à la forme *trans*, si les groupements X et Y deviennent semblables ou équivalents, trois seulement de ces modes de vibration ω'_4, ω'_5, ω'_6, sont actifs dans l'infrarouge (et inactifs dans l'effet Raman) et les trois autres ω'_1, ω'_2, ω'_3 sont inactifs dans l'infrarouge (et actifs dans l'effet Raman).

([1]) *Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 155 et **196**, 1933, p. 1011.

([2]) *Comptes rendus*, **201**, 1935, p. 50.

Composés de la forme $CH^3 - CH^2 - CH^2 - Y$.

Y.	ω'_2.	ω_2.	ω'_4.	ω_4.	ω'_1.	ω_1.	
CHO	inac.	852	821	995	1065		cm^{-1}
NH^2	inac.	?	805	972 ?	1060		
OH	inac.	854	?	963	1053		
CH^3 (¹)	inac.	833	752	950	1040	997	
Cl	648	728	785	852	1027	890	
Br	563	645	771	836	1024	889	
I	507	593	756	813	?	880	

Composés de la forme $Cl - CH^2 - CH^2 - Y$.

Y.	ω'_2.	ω_2.	ω'_4.	ω_4.	ω'_1.	ω_1.	
OH	659	743	?	843	1033	934	cm^{-1}
CH^3	648	728	785	852	1027	890	
Cl	inac.	653	707	676	938	878	
Br	720	568	664	630	917	852	
I	702	510	655	577	896	817	

Les spectres des composés de la forme $X - CH^2 - CH^2 - Y$ (avec $X = Y =$ OH, Cl, Br, I) s'interprètent de la même manière. Comme certains dérivés appartiennent à plusieurs de ces suites, il en résulte un contrôle des classifications adoptées. D'ailleurs, sauf pour ω'_1, elles ne diffèrent pas beaucoup de celles que Kohlrausch a données pour des composés analogues, d'après l'étude de l'effet Raman. On remarquera que, par exemple, pour le butane et le dicholoro-éthane-1.2, ω'_1 est bien actif dans l'infrarouge et ω'_2 inactif. Les groupements OH, NH^2 et CHO, considérés comme un tout, peuvent équivaloir à CH^3, ce qui explique l'affaiblissement et même la disparition de certaines bandes.

II. $X - CH^2 - CH^2 - CH^2 - Y$. — Nous pensons qu'il existe encore deux formes moléculaires distinctes dont nous indiquerons par δ_i et δ'_i les vibrations respectives. Nous ne pouvons en préciser actuellement les modes; mais, par suite de l'analogie que présentent certaines bandes de ces composés avec celles des composés indiqués ci-dessus, nous avons employé les mêmes indices i pour les désigner

(¹) D'après les déterminations de Coblentz pour l'état gazeux.

<table>
<tr><th></th><th>δ_2.</th><th>δ_4.</th><th>δ'_4.</th><th>δ'_2.</th><th>δ_7.</th><th>δ_8.</th><th>δ_1.</th><th>δ'_1.</th><th></th></tr>
<tr><td>I — CH² — CH² — CH² — I...</td><td>★</td><td>★</td><td>596</td><td>inac.</td><td>730</td><td>793</td><td>817</td><td>907</td><td>cm⁻¹</td></tr>
<tr><td>Cl — CH² — CH² — CH² — I...</td><td>★</td><td>572</td><td>657</td><td>714</td><td>756</td><td>817</td><td>842</td><td>922</td><td></td></tr>
<tr><td>Cl — CH² — CH² — CH² — Cl..</td><td>639</td><td>673</td><td>723</td><td>inac.</td><td>793</td><td colspan="2">864</td><td>965</td><td></td></tr>
<tr><td>Cl — CH² — CH² — CH² — Br..</td><td>566</td><td>597</td><td>655</td><td>721</td><td>773</td><td colspan="2">851</td><td>949</td><td></td></tr>
<tr><td>Br — CH² — CH² — CH² — Br..</td><td>551</td><td>590</td><td>650</td><td>inac.</td><td>754</td><td>831</td><td>843</td><td>925</td><td></td></tr>
</table>

(Le signe ★ indique que la bande tombe en dehors de notre domaine).

Composés de la forme $CH^3 — CH^2 — CH^2 — CH^2 — Y$.

Y.	δ_2.	δ_4.	δ'_4.	δ'_2.	δ_7.	δ_1.	δ'_1.	
CHO	778	888	758	inac.	930	—	1072	cm⁻¹
NH²	791	874	735	inac.	932	—	?	
OH	810	844	737	inac.	903	958	1040	
CH³	759	795	721	inac.	856	904	974	
Cl	721	785	740	654	845	870	927	
Br	641	771	737	563	794	865	911	
I	592	750	722	506	770	856	889	

Un classement analogue s'applique aux composés

$$X — CH^2 — CH^2 — CH^2 — Y \quad (X = Y = OH,\ CN,\ CH^3 Cl,\ Br,\ I)$$

et aux composés

$$Cl — CH^2 — CH^2 — CH^2 — Y \quad (Y = OH,\ CH^3,\ Cl,\ Br,\ I).$$

La vibration δ'_2 devient optiquement inactive dans les mêmes conditions que la vibration ω'_2 mais, d'après les renseignements que donne la bibliographie de l'effet Raman, il ne semblerait pas que la vibration δ'_4 suive les mêmes règles de sélection que ω'_4.

Nous avons reconnu que, pour des composés tels que $X — (CH^2)^5 — Y$, il existerait également deux formes moléculaires et deux seulement.

RADIATIONS. — *Sur l'action exercée par les métaux ordinaires sur la plaque photographique et sur l'électromètre.* Note de M. **Jean Reboul**, présentée par M. Aimé Cotton.

R. Colson (¹) a le premier signalé que quelques métaux (Zn, Mg, Cd) agissent à distance sur la plaque photographique. Russell (²) a étudié cet

(¹) *Comptes rendus*, **123**, 1896, p. 49.
(²) *Proc. Roy. Soc.*, **61**, 1897, p. 424; **62**, 1898, p. 102.

effet et montré que d'autres métaux (Ni, Al, Pb, Co, Bi, Sb) agissent aussi sur la plaque; il a expliqué ces résultats par l'intervention de l'eau oxygénée formée au contact des métaux oxydables et de l'air humide.

Ayant signalé (1) quelques expériences dont les résultats paraissent s'interpréter plus aisément dans l'hypothèse d'un rayonnement émis par le métal que dans celle d'une simple action chimique, j'ai été amené à reprendre l'étude de Russell avec des moyens plus perfectionnés que ceux dont il disposait ; j'ai pu la compléter sur plusieurs points, en exprimer les résultats quantitativement au moyen de la photométrie photographique et comparer l'action sur la plaque à celle que les métaux ordinaires exercent sur l'électromètre.

I. Avec des plaques convenables (Guilleminot-Fulgur), on constate que tous les métaux produisent à distance une action photographique plus ou moins prononcée et parfois dans des conditions où la formation d'eau oxygénée paraît difficile à expliquer; il convient toutefois de mettre à part dans cette étude le zinc, le magnésium et le cadmium dont l'action est particulièrement prononcée.

L'ensemble des résultats obtenus dans des conditions variées (pression réduite, atmosphères diverses, absorption par diverses substances) montre que sans modifier l'explication de Russel, tout se passe comme si les métaux ordinaires émettaient un rayonnement X de petit quantum dont on peut déterminer, par des mesures photométriques, les coefficients d'absorption par l'air; on trouve des valeurs variant de 0,4 à 0,8 (atm/cm^{-1}).

II. L'étude de l'ionisation de l'atmosphère environnant des métaux ordinaires (Zn, Sn, Pb, Fe, Cu, Ni, Al) amène, elle aussi à supposer qu'il y a émission par ces métaux d'un rayonnement X de faible quantum; en reprenant les anciennes expériences faites par Campbell, Wilson, Wood, etc., sur l'ionisation produite par les métaux ordinaires ou en utilisant leurs résultats, il est facile de déterminer les coefficients d'absorption par l'air du rayonnement supposé, on trouve encore des valeurs variant de 0,4 à 0,8 suivant les métaux ou les conditions expérimentales.

L'énergie correspondant à cette ionisation est-elle suffisante pour impressionner la plaque sensible ? L'expérience montre que, dans le voisinage de la surface métallique, il y a production d'un nombre d'ions dépendant de la nature du métal et atteignant plusieurs dizaines par centimètre cube pour les moins actifs d'entre eux; ainsi le nombre d'ions produits au bout d'une

(1) Jean Reboul, *Comptes rendus*, **196**, 1933, p. 1596.

semaine équivaut à celui que produit pendant quelques secondes un faisceau de rayons X d'intensité et de pénétration moyennes. L'énergie correspondant à une pareille ionisation serait donc suffisante pour qu'il y ait impression sur la plaque au bout de quelques jours de pose.

III. Pour les métaux (Mg, Zn, Cd) dont l'action se manifeste après quelques heures de pose, il faut admettre autre chose, car l'étude électrométrique n'indique pas pour ces métaux une ionisation plus marquée que pour les autres. Dans nos conditions expérimentales, l'étain s'est révélé près de 10 fois et le plomb environ 3 fois plus actif à l'électromètre que le zinc, alors que les densités photographiques obtenues pour des mêmes poses sont respectivement 1,83 pour le zinc, 0,70 pour l'étain et 0,60 pour le plomb; on est ainsi amené à admettre qu'il se produit, dans le cas de ces trois métaux, un composé dont l'action vient exagérer l'impression sur la plaque.

Russell a montré que ce composé était l'eau oxygénée, pour laquelle il signala la grande sensibilité de la plaque photographique; sa démonstration fut faite avec les métaux qui, comme le zinc, sont particulièrement actifs, elle fut, par extrapolation, considérée comme valable dans des conditions et pour des métaux tels que la formation d'eau oxygénée est difficile à admettre du moins par le processus qu'admettent les chimistes.

Remarquons que les hypothèses faites pour expliquer la formation d'eau oxygénée par les métaux oxydables en atmosphère humide, ne sont pas concordantes; certains chimistes font intervenir une activité spéciale de l'hydrogène à l'état naissant, d'autres au contraire une activité particulière de l'oxygène sous forme atomique. L'existence de radiations très absorbables émises par les métaux pourrait être la cause de cette eau oxygénée; on sait en effet que des radiations de courte longueur d'onde (ultraviolet et ultraviolet extrême) peuvent provoquer à l'air humide la formation de ce composé, ainsi l'explication de Russell serait complétée par l'hypothèse que nous avons faite pour expliquer toutes les particularités que présente l'action exercée par les métaux ordinaires sur la plaque photographique et sur l'électromètre.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Sur les propriétés des corpuscules cosmiques du groupe pénétrant.* Note de MM. **Pierre Auger** et **Albert Rosenberg**, présentée par M. Jean Perrin.

I. L'ensemble des propriétés du rayonnement cosmique peut être interprété si l'on admet l'existence de plusieurs rayonnements, distincts dès la haute atmosphère, comme l'ont montré Rossi (1), Compton et Bethe (2) et P. Auger (3). Avec deux groupes de corpuscules (D : corpuscules ultra-pénétrants, M : corpuscules, absorbables) (4), on peut déjà rendre compte de beaucoup de phénomènes. Dans le présent travail nous avons étudié les propriétés du groupe D après absorption du groupe M par des écrans de sol. Les mesures ont été faites dans deux salles souterraines, S_{30} et S_{75} (5), dans lesquelles nous avons déjà fait l'analyse du pouvoir pénétrant des corpuscules restants, et montré qu'ils constituaient un groupe dur pratiquement pur (6).

II. Pour l'étude des effets secondaires produits par ces corpuscules, nous avons dû atténuer l'effet des murs et des plafonds, qui devient très important dans des salles souterraines et peut masquer les phénomènes cherchés (7). Nous avons placé les trois compteurs du dispositif de Rossi aussi près les uns des autres que le permet la nécessité d'éviter leur déclenchement par un seul corpuscule; l'ensemble est éloigné à plus de deux mètres des parois des salles, et l'on dispose de larges écrans gerbigènes directement au-dessus (8). Dans ces conditions le nombre de coïncidences croît rapidement avec l'épaisseur des écrans (9), mais atteint vite une sorte de saturation et ne présente pas la décroissance rapide caractéristique que l'on observe avec les

---

(1) *Int. Conf. London*, 1934, p. 180.

(2) *Nature*, **134**, 1934, p. 734.

(3) *Nature*, **135**, 1935, p. 820; *J. de Physique*, 6, 1935, p. 225.

(4) *J. de Physique*, 6, 1935, p. 225.

(5) Les indices indiquant l'épaisseur en mètres de l'écran d'eau équivalent à l'ensemble de la matière traversée par les corpuscules depuis leur entrée dans l'atmosphère jusqu'à la salle de travail.

(6) *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 1022; **201**, 1935, p. 1116.

(7) *J. de Physique*, 6, 1935, p. 253.

(8) Il faut naturellement remarquer que ce dispositif compte les rayons doubles issus des écrans.

(9) Des résultats dans le même sens ont été annoncés par D. M. Follett et J. D. Crawshaw (*Nature*, **136**, 1935, p. 1026).

mêmes dispositifs au-dessus du sol, là où le groupe M est important ([1]). *Il semble bien que l'on doive voir là les effets des corpuscules secondaires peu pénétrants produits par les corpuscules primaires ultra-pénétrants*. D'après les résultats de Schwegler ([2]), ces secondaires traversent 1^{cm} de plomb au niveau du sol; d'après les résultats présents, ils traversent 6^{mm} de plomb sous 30 mètres d'eau, et 3^{mm} de plomb sous 75 mètres d'eau (valeurs très approximatives).

III. L'effet des changements de matière des écrans gerbigènes paraît confiné à leur densité ; en remplaçant le plomb par du bois, les épaisseurs produisant un effet équivalent sont multipliées par 10. Cela conduit à penser qu'il s'agit d'un effet de concentration géométrique de phénomènes secondaires se produisant dans toute matière, en corrélation avec une absorption purement massique des corpuscules primaires, ce qui explique le très grand nombre des gerbes produites par les parois des pièces de travail. Ces gerbes ont été recherchées et photographiées par M. Haenny, dans la salle S_{30}, avec une chambre de Wilson commandée par 2 compteurs; il a obtenu 5 gerbes et 1 cliché portant 2 trajectoires, pour 100 photographies de rayons solitaires, ce qui montre l'importance du phénomène.

		G.						
	Iv.	$e=0$.	$e=0{,}1$.	$e=0{,}3$.	$e=0{,}6$.	$e=1{,}8$.	$e=3$ cm.	
S_{30}...	29	7,6	10	12,7	16,3	15	15,3	chocs par heure
	(2000)	(500)	(200)	(350)	(400)	(1000)	(400)	total observé
S_{75}...	5,6	1,2	2,6	3,3	3,3	3,7	3,8	chocs par heure
	(2000)	(300)	(300)	(500)	(400)	(400)	(500)	total observé

IV. Nous avons également mesuré l'intensité verticale des corpuscules primaires, avec un dispositif à trois compteurs dans un plan vertical avec un écran de plomb de 5^{cm} interposé. Dans le tableau de résultats ci-dessus, Iv désigne cette intensité verticale; G est le nombre de gerbes en fonction de l'épaisseur e de l'écran de plomb (en centimètres). Si l'on considère le nombre de coïncidences obtenues avec un écran saturant, soit $e > 6^{mm}$, on voit qu'il décroît entre S_{30} et S_{75} à peu près comme l'intensité verticale ([3]).

([1]) Des résultats analogues ont été trouvés par Drigo (*Ric. Scientif.*, 1, 1935, p. 11-12), Rossi et Alocco (*Rend. Acad. Lincei*, 21, 1935, p. 167). Comparer également avec Schwegler (*Z. Physik*, **96**, 1935, p. 62).

([2]) Obtenus à la surface du sol, avec un dispositif sélectionnant les rayons secondaires des corpuscules ultra-pénétrants D.

([3]) Conformément aux résultats de Clay (*Physica*, **2**, 1935, p. 1042).

Le coefficient massique de disparition de la radiation dure verticale serait, d'après les valeurs de Iv, de $0,4 . 10^{-3}$ cm²/gr, entre 30 et 75 mètres d'eau.

V. Nous pensons pouvoir déduire de ces expériences que :

1° Après la traversée de 30^m d'eau, le rayonnement cosmique primaire se compose d'un seul groupe de corpuscules ultra-pénétrants (groupe D) dont l'absorption dans la matière est massique.

2° Ces corpuscules D produisent, directement ou indirectement, en perdant partiellement leur énergie, des effets secondaires (rayons multiples, gerbes) dans la matière traversée, en proportion de sa densité. Les rayons secondaires ont un faible pouvoir pénétrant (quelques millimètres de plomb) qui paraît décroître lorsque les rayons primaires traversent plus de matière avant de les produire.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Nouveau colorimètre pour les dosages en série.* Note (¹) de M. **Hormisdas**, transmise par M. Henry Le Chatelier.

Le colorimètre que nous présentons n'offre rien de nouveau quant aux principes colorimétriques. Cependant les modifications que nous y avons introduites lui donnent les avantages marqués pour les dosages en série.

Les figures 1 et 2 nous montrent l'aspect général de l'appareil. Celui-ci est formé d'une boîte métallique contenant la source lumineuse (6 lampes à incandescence) et un miroir incliné à 45°, servant à diriger les rayons lumineux à travers les tubes Nessler et le liquide examiné. Devant chaque tube, il y a une ouverture circulaire qui permet de comparer plus facilement la teinte du liquide examiné avec celles des solutions étalons.

L'appareil possède un chariot colorimétrique mobile (4) qui porte le liquide à doser : le dispositif permet à l'expérimentateur de comparer le liquide étudié à chacun des tubes de la gamme pris isolément.

La figure (11) montre le système de suspension de ce chariot. Il est muni d'une lunette d'observation et de deux miroirs dont l'un oblitère la moitié du spot lumineux du second.

Les teintes dans les gammes colorimétriques du Fe et du Mn diminuent graduellement d'intensité avec le temps ; il est donc nécessaire d'effectuer la lecture colorimétrique le plus rapidement possible, ce que permet l'emploi du chariot mobile.

(¹) Séance du 2 juin 1936.

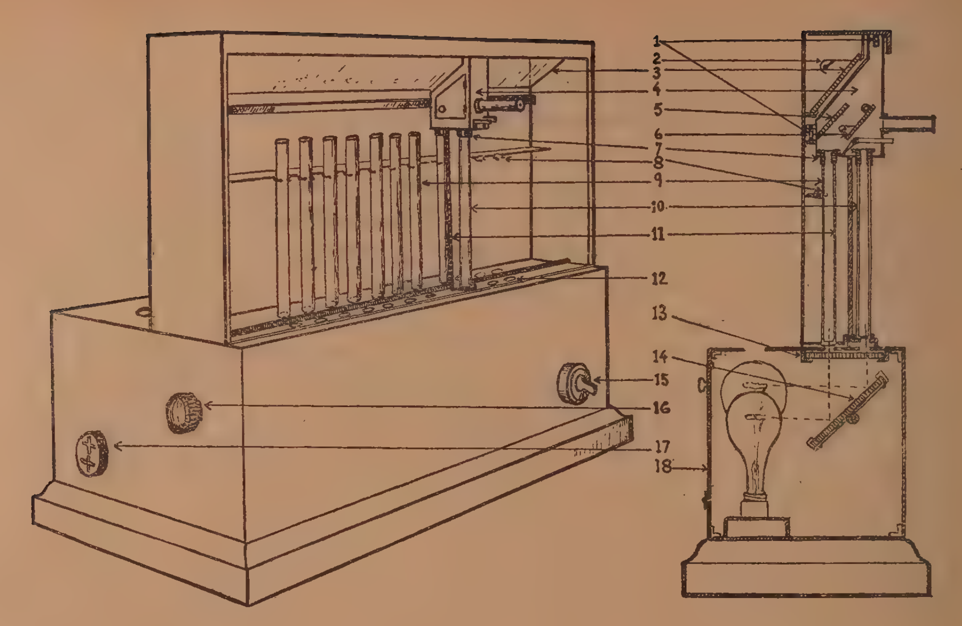


Fig. 1. Fig. 2.

1, rails qui supportent le chariot; 2, réglage de l'inclinaison du miroir; 3, miroir aux spots lumineux; 4, chariot colorimétrique; 5, miroir complet; 6, demi-miroir ajustable; 7, anneaux métalliques pour encolleter les tubes; 8, agrafes à ressort; 9, tubes Nessler étalons; 10, liquide à doser; 11, barre métallique fixée au chariot et supportant la colonne liquide à examiner. 12, ouvertures circulaires; 13, verre dépoli; 14, miroir rotatif; 15, interrupteur; 16, bouton de l'axe du miroir rotatif; 17, prise de courant; 18, porte.

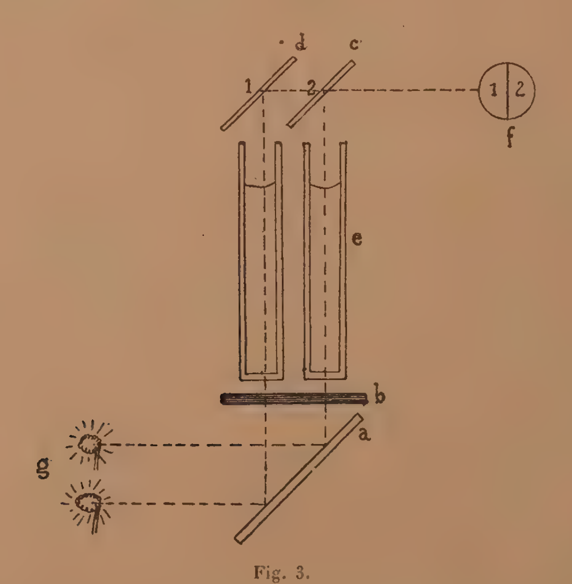


Fig. 3.

a, miroir rotatif; *b*, verre dépoli; *c*, demi-miroir; *d*, miroir complet; *e*, tubes Nessler; *f*, cercle lumineux rapprochant les deux faisceaux colorés; *g*, lampes électriques à deux hauteurs différentes.

L'intensité de la teinte des spots lumineux est sensiblement proportionnelle à la hauteur de la colonne qui transmet le faisceau lumineux. Pour évaluer une teinte plus intense que celles que comporte la gamme, il suffit d'introduire dans le tube du chariot mobile une colonne de liquide d'une hauteur connue et inférieure à celle des tubes étalons. On multiplie la teneur métallique trouvée par le rapport des hauteurs des colonnes liquides comparées.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Recherches relatives à l'élément* 87. Note de M. **Horia Hulubei**, présentée par M. Jean Perrin.

J'ai entrepris avec des méthodes très sensibles la recherche systématique de l'élément alcalin inconnu de numéro atomique 87, par son spectre de rayons X caractéristique. Cet élément a déjà été recherché par de nombreux expérimentateurs et par des méthodes très diverses avec un résultat négatif ([1]).

J'ai étudié les minerais connus les plus riches en cæsium et plus particulièrement la pollucite, où il est possible que cet élément soit présent.

L'analyse aux rayons X a été faite, jusqu'à présent, après séparation préalable des alcalins de ces minerais et dans certains cas après concentration des alcalins lourds.

J'ai fait l'analyse spectrale à l'aide d'un spectrographe à focalisation type Cauchois, dont la luminosité permet d'augmenter de beaucoup la sensibilité des méthodes d'analyse atomique par les spectres de rayons X caractéristiques. Un cristal de quartz courbé me donnait dans la région d'étude environ 5.u.x/mm dans le premier ordre pour le plan réflecteur choisi ([2]); ce plan réfléchit très mal dans le deuxième ordre, ce qui est un avantage pour l'étude que je faisais.

J'ai renoncé à détecter cet élément par son spectre K, pour éviter les difficultés dues à la volatilité du produit analysé et par suite du manque de précision sur les raies K des éléments lourds connus. J'ai donc recherché ses raies d'émission L, que la loi de Moseley permet de situer approximativement. Le manque de données spectrales pour les éléments compris entre 83 et 90, ainsi que le voisinage d'un gaz noble (86), entraînent, au reste, une légère incertitude sur ces évaluations.

([1]) Bainbridge, *Phys. Rev.*, **34**, 1929, p. 752, etc.
([2]) H. Hulubei, *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 1530.

Dans la région spectrale où l'on doit attendre l'émission $L\alpha$ de l'élément 87, je trouve, dans les spectres émis par les mélanges d'alcalins que j'ai préparés, deux raies de longueur d'onde environ 1032 u.x et 1043 u.x. Il est très plausible que ces deux nombres représentent respectivement $87\,L\alpha_1$; et $87\,L\alpha_2$. De très nombreuses expériences de contrôle me font penser que ces raies sont bien dues en effet à l'élément 87. Ainsi une confusion possible entre la raie 1032 et raie $HgL\,\beta_3$ (1031,4) est éliminée par le fait que $HgL\beta_1$, beaucoup plus forte ne paraît pas sur mes clichés. D'ailleurs l'émission 1032 persiste, pour mon produit seulement, lorsque j'emploie une pompe à diffusion d'huile; des considérations analogues sur le jeu des intensités font éliminer également $ReL\gamma_6$ et $ReL\gamma_2$, émission d'un élément tellement rare que sa présence est des plus improbables.

D'autre part il était à craindre que, dans cette région, il paraisse des raies faibles du spectre L du tungstène. Une recherche spéciale de contrôle pour ces raies a été faite. Elle montre l'existence de raies WL très faibles, encore inconnues, mais dont aucune ne se superpose à l'émission considérée; celle-ci persiste d'ailleurs, pour mon produit, sur des clichés où, par exemple, la raie forte $WL\gamma_3$ n'apparaît pas.

Pour la raie 1043, on est gêné par la présence éventuelle des émissions interdites WL_1N_V (1043,5) et WL_1N_{IV} (1044,4); elle me semble cependant distincte de ces dernières parce qu'elle persiste également lorsque $WL\gamma_3$ n'est pratiquement pas visible. L'émission $K\alpha$ du Br se voit très bien sur mes clichés à côté de celle citée.

Outre ces raies $L\alpha$, qui ont été déjà assez nettes pour que j'en donne une première mesure approximative, d'autres raies plus faibles sont visibles sur mes clichés, qui me semblent pouvoir appartenir aux spectres $L\beta$ et $L\gamma$ de l'élément 87. Leur peu d'intensité relative et l'élimination, par des contrôles et recoupements convenables, d'un certain nombre de coïncidences possibles me confirment encore dans cette interprétation.

Dans ces mélanges d'alcalins retirés de la pollucite, le rubidium se manifeste très fortement par son spectre K caractéristique.

Les faits expérimentaux résumés ci-dessus engagent donc à penser que l'élément 87 se trouve dans la pollucite, en quantité d'ailleurs extrêmement faible. Il s'agirait d'un élément rare, mais non pas fugitif comme on le supposait, pour lequel je propose le nom de *Moldavium*.

Ce résultat n'est pas incompatible avec ceux d'autres auteurs, soit parce qu'ils ont employé d'autres méthodes de détection moins sensibles, soit

parce que l'état de la technique de la recherche par rayons X lorsqu'ils l'ont employée ne leur ait pas permis de déceler des quantités si faibles de cet élément. La sensibilité de la détection atomique à l'aide des spectres d'émission X caractéristiques pourrait, dans l'état actuel de la technique, permettre de déceler une proportion relative de 10^{-7} d'un élément dans un mélange.

Déjà en 1932 Eddy et Laby (1) observaient le spectre d'émission L du Bi dans un alliage d'étain qui n'en contenait que 2.10^{-4} pour 100.

PHYSICOCHIMIE. — *Diamagnétisme des sulfocyanates et de l'ion* Cu^{+1}. Note (2) de M. **Clément Courty**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Il n'existait pas, à ma connaissance, de mesures sur les coefficients d'aimantation des sulfocyanates lorsque j'ai étudié les sulfocyanates de potassium et d'ammonium.

Ces sels, dont les formules peuvent s'écrire

$$N \equiv C - S - K \quad \text{et} \quad N \equiv C - S - NH^4$$

(sulfocyanates) ou $S = C = N - K$ et $S = C = N - NH^4$ (isosulfocyanates), se sont montrés au point de vue magnétique uniquement sous la deuxième forme. D'ailleurs P. Pascal (3) a démontré par le même procédé que, pour le cyanate de potassium, seule la forme $O = C = N - K$ convenait.

Mes observations consignées dans d'autres publications (4) m'ont amené à étudier le sulfocyanate d'argent et le sulfocyanate cuivreux. Pour ce dernier en particulier la mesure du coefficient d'aimantation χ présentait un double intérêt : vérification de la constitution des sulfocyanates sous la forme *iso* et vérification du magnétisme de l'ion Cu^{+1} annoncé diamagnétique par C. Horst (5) sans en donner la valeur.

Sulfocyanate d'argent. — Préparé par double décomposition à froid entre le nitrate d'argent et le sulfocyanate de potassium. Le nitrate d'argent,

(1) *Proc. Roy. Soc.*, A, **135**, 1932, p. 637.
(2) Séance du 2 juin 1936.
(3) *Comptes rendus*, **176**, 1923, p. 1888.
(4) *Thèse Fac. Sc. Paris*, 1935; *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, **3**, v, 1936, p. 929.
(5) *Thèse Strasbourg*, 1911-1912.

même pur du commerce, contenant souvent des traces de cuivre, plomb, bismuth, nous l'avons fondu trois fois et recristallisé après chaque fusion dans l'eau bidistillée à basse pression après filtration bien entendu.

Le sulfocyanate de potassium a été simplement recristallisé dans l'alcool à 95°.

Le précipité obtenu par mélange des deux solutions salines a été lavé à l'abri de la lumière jusqu'à ce que les eaux de lavage ne révèlent plus de traces de nitrate ni de sulfocyanate. On sait en effet [1] qu'il se forme facilement des sulfocyanates doubles qui se dissocient dans l'eau en leurs deux constituants.

Après séchage à l'étuve à 100°, le sel parfaitement blanc et sec a donné à la balance magnétique Curie-Chéneveau avec tube en quartz

$$-10^6\chi = 0,3726.$$

Sulfocyanate cuivreux. — Le sel a été préparé dans un courant de gaz sulfureux par double décomposition à froid entre le sulfocyanate d'ammonium pur et le sulfate de cuivre purifié par cristallisations successives, puis, lavé comme le précédent jusqu'à disparition de toute trace de sulfate et d'ammonium.

Les premières eaux de lavage étaient légèrement rosées indiquant la présence d'une trace de fer malgré les nombreuses cristallisations préalables du sulfate de cuivre. Par la suite, aucune autre trace de fer n'est apparue.

Le précipité blanc (donc exempt de sel cuivrique qui est noir) a donné avec le même appareil après dessiccation à l'étuve à 100°,

$$-10^6\chi = 0,4077.$$

Conséquences. — Des mesures relatives aux sulfocyanates de potassium et d'ammonium j'avais tiré pour le radical monovalent ($S = C = N -$) la part contributive

$$-10^6\chi_{SCN} = 30,27,$$

si l'on utilise cette valeur dans l'additivité chimique, on arrive par le calcul aux valeurs expérimentales.

Pour le sulfocyanate d'argent SCN Ag = 166 le coefficient d'aimantation moléculaire mesuré est

$$-10^6\chi_M = 0,3726 \times 166 = 61,85.$$

---

(1) R. CERNATESCU, *Bull. Ac. roumaine*, 6, 1920, p. 53.

Si l'on retranche la part contributive 30,27 il reste

$$-10^6\chi_A(Ag) = 31,58.$$

Or P. Pascal [1] donne $-10^6\chi_A(Ag) = 31,2$.

Par le sulfocyanate cuivreux $SCNCu = 121,5$ les mêmes calculs donnent

$$-10^6\chi_M = 0,4077 \times 121,5 = 49,53,$$

d'où

$$-10^6\chi_A(Cu) = 19,26.$$

W. R. Angus [2] donne précisément cette valeur pour $-10^6\chi_A Cu^{+1}$.

Conclusion. — Les sulfocyanates de potassium, d'ammonium, d'argent, cuivreux répondent donc aux formules et valeurs suivantes :

Formules.	$-10^6\chi_M$ mesuré.	$-10^6\chi_M$ calculé.	$10^6\chi_M$ mesuré $-10^6\chi_M$ calculé.
$S=C=N-K$	48,40	48,77	$-0,37$
$S=C=N-NH^4$	48,108	48,048	$+0,06$
$S=C=N-Ag$	61,85	61,47	$+0,38$
$S=C=N-Cu$	49,53	49,53	0

L'ion Cu^{+1} a donc bien la valeur fixée par W. R. Angus par la théorie, mais pour l'argent ce même auteur donne $-10^6\chi_A(Ag) = 42,11$ qui diffère nettement de la valeur de Pascal que nous avons retrouvée.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Différences de comportement des* cis *et* trans *cyclohexanediols au cours de leur déshydratation.* Note de M. **Marc Tiffeneau** et Mlle **B. Tchoubar**, présentée par M. Auguste Béhal.

Nous avons signalé les différences de comportement que présentent les dérivés *cis* et *trans*, d'une part, dans la déshydratation des cyclohexanediols bisecondaires et secondaires tertiaires [3], d'autre part, dans la déshalogénation des chlorhydrines [4] de quelques cyclohexanediols secondaires ter-

(1) *Traité Ch. min.*, 8, p. 572.

(2) *Proc. of Roy. Soc.*, A, 136, 1932, p. 569.

(3) Tiffeneau et Tchoubar, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 1624.

(4) Tiffeneau et Tchoubar, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 360. Des constatations analogues ont été faites non seulement par Bartlett et Rosenwald (*J. Am. Ch. Soc.*, 56, 1934, p. 1990), mais aussi par Godchot, Mousseron et Granger (*Bull. Soc. chim.*, 2, 1935, p. 1101 ; *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 748).

tiaires. Il était intéressant de rechercher si ces différences de comportement peuvent également être constatées avec les divers homologues des composés ci-dessus. Nous avons entrepris à cet effet l'étude de la déshydratation de deux paires de cyclohexanediols *cis* et *trans*, l'une comprenant les dérivés *cis* et *trans* du méthyl-1-cyclohexanediol-3.4, c'est-à-dire d'un glycol bisecondaire; l'autre les dérivés *cis* et *trans* de l'éthyl-1-cyclohexanediol-1.2, c'est-à-dire d'un glycol secondaire tertiaire. Nous avons pu confirmer entièrement nos résultats antérieurs à savoir que ces différences sont beaucoup plus marquées pour les glycols bisecondaires que pour les secondaires tertiaires. Dans tous les cas, la déshydratation a été effectuée [1] par catalyse sur Al^2O^3 à 270-290°. Les rendements en produits combinables à la semicarbazide se sont élevés, suivant les cas, de 30 à 70 pour 100.

I. *Déshydratation catalytique des méthyl-1-cyclohexanediols-3.4* cis *et* trans :

1° *Cis.* — Ce glycol ($Éb_{22-23}$: 131-132°) a été obtenu par oxydation permanganique du méthyl-1-cyclohexène-3. Sa déshydratation fournit 80 à 85 pour 100 de méthylcyclohexanone-3 (déshydratation vinylique probable) et 15 à 20 pour 100 de méthyl-1-cyclopentyl-3-formaldéhyde, par transposition du type hydrobenzoïnique avec migration du CH^2 et raccourcissement de cycle. La formation de méthyl-1-cyclohexanone-3, avec un peu de 1.4-montre que c'est surtout l'hydroxyle en 4 qui est éliminé.

2° *Trans.* — Ce glycol, préparé par hydrolyse de l'époxyde correspondant, contient probablement les deux formes *trans trans* et *trans cis* (P. F. 52 à 72°), mais les deux hydroxyles sont en position *trans*. La déshydratation fournit uniquement l'aldéhyde méthyl-1-cyclopentyl-3-formique (semi-carbazone F. 136°; amide de l'acide correspondant F. 142°) par transposition hydrobenzoïnique avec migration exclusive du CH^2 et raccourcissement du cycle.

1° (*cis*) Déshydratation vinylique
Migration de H hydroxylique (flèche).
Formation de méthyl-1-cyclohexanone-3.

2° (*trans*) Déshydratation
hydrobenzoïnique.
Migration de CH^2 (flèche).

En résumé la déshydratation du *cis* méthyl-1-cyclohexanediol-3.4 est surtout vinylique et, en très faible partie, hydrobenzoïnique. Celle du *trans* est exclusivement

---

[1] La déshydratation par SO^4KH des cyclohexanediols bisecondaires fournit les carbures diéthyléniques correspondants (HENDERSON et SUTHERLAND, *J. Am. Ch. Soc.*, **97**, 1910, p. 1618; SENDERENS, *Comptes rendus*, **177**, 1923, p. 1184; **180**, 1925, p. 710).

hydrobenzoïnique. Ainsi la différence de comportement, signalée antérieurement entre le *cis* et le *trans* cyclohexanediol-1.2, se retrouve de même entre les dérivés *cis* et *trans* d'un autre glycol bisecondaire, le méthyl-1-cyclohexanediol-3.4.

II. *Déshydratation catalytique des éthyl-1-cyclohexanediols-1.2 cis et trans* :

1° *Cis*. — Ce glycol (F. 80°) a été préparé d'après Bartlett et Rosenwald (*loc. cit.*). Sa déshydratation fournit 90 à 95 pour 100 d'éthylcyclohexanone (semicarbazone F. 162°) et 5 à 10 pour 100 d'aldéhyde éthylcyclopentylformique (amide de l'acide correspondant F. 94°). La formation de cet aldéhyde montre que la déshydratation s'est effectuée, au moins en partie, suivant le type semihydrobenzoïnique avec migration du CH^2. Quant à la formation d'éthylcyclohexanone, elle peut résulter soit de la même déshydratation semihydrobenzoïnique, mais avec migration prépondérante de H (90 pour 100), soit plus vraisemblablement par déshydratation vinylique et migration obligatoire de H. En définitive comportement analogue à celui du *cis*-méthyl-1-cyclohexanediol-1.2 étudié antérieurement.

2° *Trans*. — Ce glycol (F. 54°) a été obtenu par hydratation de l'époxyde. Sa déshydratation a fourni environ 80 à 85 pour 100 d'éthyl-1-cyclohexanone-2 et 15 à 20 pour 100 d'aldéhyde éthylcyclopentylformique par transposition semihydrobenzoïnique.

1° (*cis*) Déshydratation vinylique. Migration de H hydroxylique. Formation d'éthylcyclohexanone.

2° (*trans*) Déshydratation semihydrobenzoïnique [1] Migration de CH^2 (15 pour 100) et de H (90 pour 100).

Ici encore le *trans* se comporte différemment du *cis*, non par la nature des produits formés, comme on l'avait déjà constaté pour un autre glycol secondaire tertiaire, le méthylcyclohexanediol, mais par leurs proportions relatives, la cétone étant formée en plus grande quantité dans le cas du *cis*.

Conclusions. — Dans la déshydratation catalytique des α-cyclohexanediols qui peut conduire à des cyclohexanones (déshydratation vinylique) ou à des cyclopentylformaldéhydes (transposition hydrobenzoïnique avec raccourcissement de cycle), les dérivés *cis* et *trans* présentent des différences de comportement qui sont beaucoup plus marquées pour les glycols bisecondaires que pour les secondaires tertiaires. Chez ces derniers la transposition

(1) Dans notre Note antérieure (*loc. cit.*, p. 1625), ce schéma a été incorrectement formulé.

hydrobenzoïnique est plus importante pour les *trans* que pour les *cis*, mais, dans les deux cas, c'est la déshydratation vinylique qui l'emporte de beaucoup (80 à 95 pour 100). Chez les glycols bisecondaires, la transposition hydrobenzoïnique est exclusive pour les *trans* alors que pour les *cis* la déshydratation vinylique, quoique non exclusive, est très largement prépondérante.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le mécanisme de la transposition allylique.* Note de MM. **Albert Kirrmann** et **Pierre Renn**, présentée par M. Robert Lespieau.

Alors que le dichloro-1.1-propène-2 (chlorure d'allylidène) est assez stable malgré ses réactions anormales [1], son analogue bromé, $CH^2{=}CH{-}CHBr^2$, subit très facilement, à froid, la transposition allylique en dibromo-1.3-propène.

Sa préparation nous a fait des difficultés. Un premier essai à partir de l'acroléine avait échoué, un autre par action de la quinoléine sur le tribromo-1.1.2-propane a donné d'autres produits isomères. Nous avons réussi à obtenir le corps cherché par déshydratation du dibromo-1.1-propanol-2 (préparé lui-même par l'aldéhyde dibromée et le bromure de méthyle-magnésium), mais la meilleure méthode semble être celle décrite plus bas.

Le corps des deux provenances conduit, par réaction anormale, au même *p*-nitrobenzoate que Lespieau [2] avait obtenu à partir du dibromo-1.3-propène. D'autre part, les deux échantillons se transforment rapidement en ce bromure.

Souvent, pour expliquer de semblables isomérisations, la transposition allylique aussi bien que la desmotropie céto-énolique [3], on a supposé l'addition éphémère d'une molécule auxiliaire (hydracide, eau, etc.) qui serait ensuite éliminée dans un autre sens. Ici on pourrait songer à BrH, pouvant donner le tribromo-1.1.3-propane, lequel conduirait au but par perte de BrH :

$$CH^2{=}CH-CHBr^2 \xrightarrow{(+BrH)} CH^2Br-CH^2-CHBr^2 \xrightarrow{(-BrH)} CH^2Br-CH{=}CHBr.$$

(1) Kirrmann, Pacaud et Dosque, *Bull. Soc. chim.*, 5e série, 1, 1934, p. 860.
(2) R. Lespieau, *Ann. Chim.*, 7e série, 11, 1897, p. 243.
(3) Henrich, *Les théories de la Chimie organique*, Paris, 1925, p. 291.

Cette façon de voir semble effectivement étayée par le fait que BrH est un catalyseur actif de l'isomérisation. Le bromure d'allylidène se conserve pendant plusieurs semaines intact en tube scellé, additionné d'un petit fragment de potasse sèche. En présence de gaz bromhydrique, au contraire, la transformation est presque totale en 24 heures.

Nous avons voulu contrôler ce mécanisme hypothétique en essayant de réaliser les deux réactions successives. En fait, l'action d'un excès de BrH sur le dibromure ne peut pas conduire à une addition parce que l'isomérisation en bromure d'allyle β bromé est très rapide. Sur ce dernier la fixation de BrH est assez difficile. Nous l'avons obtenue en ajoutant au bromure le gaz bromhydrique liquéfié à — 80° et en laissant agir en tube scellé pendant 15 jours à + 20°. Le produit principal obtenu n'est pas le tribromo-1.1.3-propane mais son isomère 1.2.3, identifié par son point de fusion (13 à 15°). Or on sait que ce dérivé ne fournit par perte de BrH ni l'un ni l'autre de nos deux dibromures mais le dibromopropène $CH^2Br - CBr = CH^2$.

D'autre part nous avons préparé le tribromo-1.1.3-propane par fixation de BrH sur l'acroléine, puis action de PCl^3Br^2. Voici les constantes du tribromure : $Éb_{14}$: 84 à 85°; $d_{17} = 2,350$; $n_{17} = 1,569$. L'enlèvement de BrH est assez difficile. La quinoléine est sans action. On arrive au but, bien qu'avec un mauvais rendement, par la potasse anhydre vers 200°. Voici les constantes du dibromopropène obtenu : $Éb_{14}$: 29° à 31°; $d_{20} = 1,945$; $n_{20} = 1,532$. Ce n'est donc pas le bromure d'allyle β bromé ($Éb_{14}$: 55°), comme ferait penser le schéma hypothétique, mais le bromure d'allylidène. Il est ainsi bien démontré par l'ensemble de ces résultats que le tribromure ne peut pas être un intermédiaire dans la transposition. Les faits sont au contraire compatibles avec une isomérisation directe d'après la théorie de la synionie [1].

PHYSIQUE CRISTALLINE. — *Inversion du polymorphisme dans la série des diacides saturés normaux.* Note [2] de M. **François Dupré la Tour**, présentée par M. Maurice de Broglie.

J'ai annoncé [3] que tous les acides saturés normaux à nombre impair d'atomes de carbone (entre 3 et 17) peuvent se présenter sous deux

(1) Prévost et Kirrmann, *Bull. Soc. chim.*, 4e série, 49, 1931, p. 226.

(2) Séance du 2 juin 1936.

(3) *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 479.

variétés cristallines différentes, dont une seule est stable à température élevée.

Une étude détaillée (1) a montré que, pour les premiers termes (acides malonique et glutarique), la structure de ces formes ou de l'une d'entre elles diffère notablement de ce qu'on remarque pour les termes supérieurs. A partir de l'acide pimélique (à 7 atomes de carbone), au contraire, les paramètres de chacune des formes varient peu (sauf la longueur de l'axe *c* qui correspond à l'axe de la chaîne aliphatique) et de façon assez régulière d'un terme au suivant. Le groupe de symétrie est aussi le même, ainsi que la structure que l'on peut déduire des intensités des taches de diffraction.

Ce fait était connu pour une des formes (2). Il est également vrai pour l'autre forme, nouvellement étudiée à travers la série, comme en témoigne le tableau suivant (3) :

	Atomes de carbone.	*a*.	*b*.	*c*.	β.	Nombre de molécules.	Groupe de symétrie.
Acide pimélique β..	7	5,68 Å	9,69	22,36	137°30′	4	C_{2h}^5 ou $P2_1/c$
Acide azélaïque β..	9	5,60	9,59	25,35	136°10′	4	C_{2h}^5 ou $P2_1/c$

En ce qui concerne les acides supérieurs, de 11 à 17 atomes de carbone, le polymorphisme n'a été étudié que sur des poudres. Les mesures faites sur les clichés permettent cependant de reconnaître des *formes cristallines* analogues à celles des acides pimélique et azélaïque. Voici par exemple les valeurs en Å de $d_1 = 1/2\, c \sin\beta$ (4) :

Nombre d'atomes de carbone........	7.	9.	11.	13.	15.	17.
Valeurs de d_1 forme α........	8,47	10,47	**12,6**	**14,7**	**16,84**	**19,0**
» forme β........	**7,55**	**9,43**	11,3	13,2	15,1	16,95

Mais la similitude ne subsiste pas si l'on examine la relation de la *température* avec la stabilité de ces deux formes. Pour les acides 7 et 9, une élévation de température tend à produire la transformation de α en β; pour les termes suivants, au contraire, on peut passer par chauffage de β en α. Il y a donc, au point de vue de l'influence de la température, une sorte d'*inversion* quand on passe de l'acide azélaïque au terme suivant.

---

(1) Dupré la Tour, *Ann. de Phys.*, **18**, 1932, p. 199.

(2) W. A. Caspari, *J. Chem. Soc.*, **100**, 1928, p. 3235.

(3) Dans la Note citée, j'avais choisi autrement l'orientation de la maille monoclinique pour l'acide pimélique. Mais ce choix compliquait de façon inutile l'interprétation des résultats. Sur les dénominations α et β, voir la fin de la présente Note.

(4) Les chiffres gras se rapportent à la forme stable à haute température.

Les propriétés cristallines macroscopiques se modifient aussi. Jusqu'à 9 atomes de carbone, la poudre est brillante et dure. A partir de 11, elle est onctueuse et s'étale facilement à la manière des corps gras : les cristaux élémentaires « s'orientent » alors, c'est-à-dire que les faces (001) se disposent parallèlement à la surface du support, et les réflexions ($00l$) obtenues aux rayons X avec ces couches minces peuvent être relativement plus intenses que dans un diagramme de poudre ordinaire.

Enfin, lorsqu'on peut mesurer avec quelque précision la température de transformation, on trouve qu'elle est moins éloignée du point de fusion à partir de 11 atomes de carbone que dans les premiers termes de la série.

L'influence de la température m'avait amené, dans les précédentes publications, à désigner par la lettre α la forme stable à haute température, et par β l'autre forme. L'étude présente me conduit à adopter désormais une notation différente pour les premiers termes de la série. Pour les acides à 3, 4, 5, 7 et 9 atomes de carbone, une élévation de température favorise l'apparition de la forme β. A partir de 11 atomes de carbone, elle favorise l'apparition de la forme α. Les notations α et β ont ainsi une valeur *cristallographique* et non plus *thermodynamique*.

Quant à l'interprétation de la discontinuité qui existe, au point de vue du comportement thermique, entre 9 et 11 atomes de carbone, elle sera proposée dans une prochaine publication. Je signale seulement qu'elle est analogue à celle qui a été présentée pour la série des diacides à nombre *pair* d'atomes de carbone, pour lesquels il existe aussi une discontinuité [1]. Elle fait intervenir principalement l'action mutuelle des groupements COOH appartenant à des molécules voisines.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur un frigorimètre différentiel.*

Note [2] de M. **Georges Rempp**, présentée par M. Charles Maurain.

Dans les études de micro-*météorologie*, l'anémomètre à fil chaud est certainement l'instrument le mieux approprié pour la mesure des faibles mouvements de l'air à proximité du sol. Dans les études de micro-*climatologie*, au contraire, l'inertie extrêmement faible de cet anémomètre est gênante, à moins d'avoir recours, pour l'intégration des élongations du galvano-

---

[1] F. Dupré la Tour et A. Riedberger, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 215.

[2] Séance du 2 juin 1936.

mètre, à des artifices, par exemple, à la photogrammétrie d'une couche sensible sur laquelle on aurait laissé s'accumuler les impressions produites par le spot. Il serait donc utile de disposer d'un appareil simple et peu coûteux de manière à pouvoir en installer simultanément, pour des mesures comparatives, une série d'exemplaires dans des champs de différente nature, sur des terrains nus, etc. qui donnerait immédiatement la vitesse moyenne du vent, ou plutôt, comme l'anémomètre à fil chaud, approximativement la moyenne de $\sqrt{v}$, c'est-à-dire du terme qui intervient dans le refroidissement du sol et des végétaux. Il suffit, pour obtenir un appareil de ce genre, de faire du *frigorimètre* (¹) un instrument différentiel.

Deux récipients identiques en cuivre chromé et poli sont reliés par l'intermédiaire d'un manomètre à contacts. La forme du récipient peut d'ailleurs varier suivant le but qu'on se propose. Les deux récipients sont exposés identiquement au rayonnement. L'un d'eux est chauffé électriquement à l'aide d'un enroulement logé dans sa paroi épaisse. Le courant est coupé quand la différence entre les températures des deux récipients atteint une valeur donnée, soit Θ_s (quelques degrés); il est rétabli quand la différence de température est tombée à la valeur Θ_i.

Soit k/M (M = masse calorifique) l'inverse du coefficient d'inertie thermique du récipient, défini, en période de refroidissement, par l'équation (²)

$$-\frac{d\Theta}{dt}=\frac{k}{M}\Theta;$$

soit q la quantité de chaleur produite, par unité de temps, dans l'enroulement chauffant; soit Θ_n la différence de température limite obtenue pour une valeur donnée de k

$$q=k_n\Theta;$$

si l'on pose enfin

$$n=\frac{\Theta_n}{\Theta_s},\qquad u=\frac{\Theta_i}{\Theta_s},$$

et si l'on désigne par r le rapport de la durée totale des périodes de chauffage à celle des périodes de refroidissement, on a

$$r=\frac{-\log u}{\log(n-u)-\log(n-1)}.$$

(¹) R. Thilenius, *Meteorologische Zeitschrift*, 48, 1931, 254.

(²) Voir A. de Quervain, *Beitrage z. Physik der freien Atmosphäre*, 1, 1904-1905, p. 183.

On obtient r soit en faisant inscrire les périodes de chauffage sur un chronographe, soit plus simplement en mesurant la quantité d'éléctricité passée dans un temps connu (l'intensité du courant fourni par des accumulateurs est très constante). D'un graphique où sont tracées, avec r et u comme coordonnées, des équilignes de n, on tire la valeur de n correspondant aux données de l'expérience. Il suffit ensuite d'avoir mesuré, une fois pour toutes, Θ_n en fonction du vent. Il sera bon d'ailleurs, pour les faibles valeurs de k, de déterminer Θ_n indirectement, à l'aide d'un courant de chauffe réduit, afin de demeurer dans les limites habituelles de Θ et dans les conditions qu'elles impliquent pour l'émission du rayonnement et pour la production des courants d'air convectifs, facteurs dont il serait difficile de tenir compte.

On constate, en étudiant le graphique des équilignes de n, que les petites variations de Θ, et de u (inévitables, si l'on demande une construction simple) ne sont guère gênantes dans les limites de précision dont on doit se contenter dans ce genre de recherches.

PATHOLOGIE VÉGÉTALE. — *Action pathogène d'une bactérie isolée de tubercules de Pommes de terre.* Note de MM. **Étienne Foex** et **Maurice Lansade**, présentée par M. Julien Costantin.

Dans les milieux où la Pomme de terre a subi des flétrissements auxquels le *Fusarium oxysporum* Schelchtendahl n'est sans doute pas étranger ([1]), les altérations suivantes sont fréquentes sur le tubercule : anneau vasculaire très accusé, surtout près de l'insertion du stolon, tendant à brunir; pourriture humide s'organisant à son voisinage et pouvant se généraliser. A tous les stades de l'altération s'observent des bactéries. A partir de tubercules encore peu gravement atteints, M. Mocquot, alors notre collaborateur (1934-1935), fit de nombreux isolements. Ne furent retenues que les souches dont l'inoculation devait révéler le pouvoir pathogène. L'inoculation de l'une d'elles faisait apparaître dans le tubercule les particularités constatées dans l'anneau vasculaire et au voisinage de celui-ci. Les caractères de cette bactérie sont les suivants :

Bâtonnets arrondis aux extrémités; isolés ou en chaînes courtes (3 à 4

([1]) Ét. Foex et M. Lansade, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1812-1813.

éléments); colorable thionine phéniquée, violet de gentiane, fuchsine de Ziehl; $1^{\mu},4$-$1^{\mu},5 \times 0^{\mu},5$-$0^{\mu},7$ sur frottis coloré au v. gentiane; mobile par 1 à 2 flagelles unipolaires: gram négatif; non acido-résistant; *bouillon* : léger voile; *gélatine*, en piqûre : liquéfaction en cylindre; en boîte de Petri : zone liquéfiée bleutée; colonies rondes et légèrement frangées; *gélose* : colonies légèrement rougeâtres (bactérie fluorescente); *lait* : coagulum mou; *hydrates de carbone*, fermentation : lactose, maltose, mannite; *tranches de pomme de terre crue* : large développement jaunâtre; désintégration des tissus; *sur pommes de terre entières* : infection positive.

Ces caractères cadrent avec ceux du *Bacterium xanthochlorum* Schuster, espèce que M. Stapp avait cru reconnaître dans la culture que nous lui avions soumise.

L'action pathogène de la souche de *Bacterium xanthochlorum* Schuster, qui avait été ainsi isolée, fut étudiée : sur tubercules; sur bourgeons de tubercules; sur feuilles de Solanées; sur feuilles de Légumineuses; sur semis de Solanées.

Étude expérimentale sur tubercules. — L'inoculation, par piqûre, par application de culture sur une plaie pratiquée à la base de l'organe, par immersion, dans une suspension de bactéries, d'un tubercule entier et âgé, a échoué. Au contraire, le dépôt de culture sur la section d'un tubercule coupé en deux; l'immersion de 30 heures d'un jeune tubercule entier (volume d'une noix) dans une suspension de bactéries, ont permis l'infection, qui, dans ce dernier cas, a été réalisée à travers les lenticelles. Ces deux modes d'inoculation ont été suivis de l'apparition des symptômes caractéristiques, notamment en ce qui concerne l'anneau vasculaire. Le réisolement de la bactérie a été obtenu dans les deux cas.

Des inoculations, par piqûre, ont échoué lorsqu'elles ont été pratiquées sur tige et ont abouti lorsqu'elles ont été appliquées sur bourgeon. Chez celui-ci, une désorganisation, d'ailleurs peu étendue, s'est établie autour de la piqûre.

Des inoculations sur feuilles de Pomme de terre, avec des cultures de 48 heures sur gélose, ont donné des lésions visibles au bout de deux jours. La tache a ensuite atteint 2^{mm} à 3^{mm}. Des inoculations ayant abouti à des infections ont également été obtenues sur Tabac, ainsi que sur *Solanum æthiopicum* L., *S. Rabonnetii* Carr. Des réisolements ont été réalisés à partir des feuilles de Pomme de terre et de Tabac. Ont également été infectées les feuilles de Poids, Fèves et Haricots (réisolement dans ce dernier cas).

Des inoculations positives ont été effectuées sur de jeunes semis des plantes : *Datura ægyptica* Vesl., *D. Ecklonis* Lind., *Hyoscyamus niger* L., *Solanum topira* Humb. et Bompl., *S. humile* Bernh., *S. nigrum* var. *chlorocarpum*.

Le réisolement a eu lieu dans tous les cas.

Nous avons donc démontré que des altérations du tubercule du type de ceux que nous avons constatés peuvent être déterminés par inoculation d'une bactérie que nous avons caractérisée et dont l'action pathogène s'exerce sur divers organes de plantes appartenant à au moins deux familles.

CHIMIE AGRICOLE. — *Les indices de plomb dans les sucres d'érable et de canne.* Note de MM. **Paul Riou** et **Joachim Delorme**, présentée par M. Henry Le Chatelier.

Au cours de nos travaux sur les sucres d'érables [1], nous avons examiné certaines méthodes d'analyse employées au Canada et aux États-Unis.

L'une de celles-ci consiste à déterminer l'indice de plomb du sirop ou du sucre d'érable, ce qui permet d'apprécier leur pureté. Cet indice est le poids du précipité obtenu en traitant une solution contenant 5^g de produit sec dans 20^{cm^3} d'eau distillée, par 2^{cm^3} d'une solution d'acétate basique de plomb de densité 1,25 : on rapporte le poids du précipité à 100^g de matière sèche. Le nombre obtenu par ce calcul est l'indice de plomb (canadian Lead Value). Il varie pour les sucres d'érable entre 1,75 et 7,50.

Cette méthode permet de s'assurer que le sucre d'érable et ses dérivés ne contiennent pas de sucres raffinés, car ces derniers, traités par l'acétate de plomb, ne donnent qu'un léger précipité. Lorsqu'ils sont mélangés au sirop ou au sucre d'érable, ils en abaissent sensiblement l'indice de plomb.

Nous nous sommes demandé quel est l'indice de plomb des sucres bruts de canne. Des expériences faites sur plusieurs sucres bruts de canne de différentes parties du monde nous ont permis de conclure que les indices de plomb de ces sucres sont pour plusieurs dans les limites assignées aux sucres d'érable. Les indices de plomb de 22 sucres bruts de canne de provenances différentes nous ont donné les résultats suivants :

---

[1] *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1132.

Provenance.	Indice.	Provenance.	Indice.	Provenance.	Indice.	Provenance.	Indice.
Antilles...	7,40	Antilles.....	3,47	Antilles........	12,45	Indes occid.	1,63
Cuba.....	5,82	Indes occid.	3,46	Cuba..........	12,28	Indes occid.	1,50
Antilles...	5,58	Jamaïque...	3,23	Java..........	10,17	Cuba......	1,50
Jamaïque..	5,33	Trinidad....	2,20	Java..........	9,01	Antilles....	1,48
Jamaïque..	4,30	Trinidad....	2,15	Indochine franç.	8,04	Java.......	1,38
Natal.....	4,03			Australie......	1,88		

On constate que 11 de ces sucres sont entre les limites de l'indice des sucres d'érable. 5 sont au-dessus de ces limites et 6 seulement sont au-dessous. Mais, en les mélangeant à parties égales avec des sucres d'érable purs, on obtient des indices de plomb variant entre les limites déjà données.

Nous pouvons donc dire que cet indice ne peut servir de critérium de pureté pour les sucres d'érable et leurs dérivés, étant donné qu'il ne nous donne aucune indication valable, si le produit a été falsifié avec du sucre brut de canne.

CYTOLOGIE. — *Les hétérochromosomes du Mulot.* Note de M. **Albert Raynaud**, présentée par M. Maurice Caullery.

K. Oguma, étudiant en 1934 la spermatogénèse *d'Apodemus speciosus*, trouve un complexe sexuel du type XO suivant le mode post-réductionnel. S. Tateishi, signale en 1935 le type XY chez trois Mulots : *Apodemus agrarius nigpoensis*, *A. agrarius semotus*, *A. speciosus*; il admet également que la première division est équationnelle pour le complexe sexuel. R. Matthey (1935), observe à son tour chez *Apodemus sylvaticus* un complexe sexuel formé de quatre chromatides parallèles et égales et déclare ne pouvoir affirmer s'il s'agit de deux X ou d'un XY morphologiquement identiques. Ce même auteur confirme en 1936 ses premières observations par l'étude *d'Apodemus agrarius* et retrouve la même forme d'hétérochromosomes. Il résulterait de recherches encore inédites, mais dont le professeur Matthey a bien voulu m'indiquer les principaux résultats, que c'est le type XY qui serait réalisé chez le Mulot avec prédominance de la post-réduction.

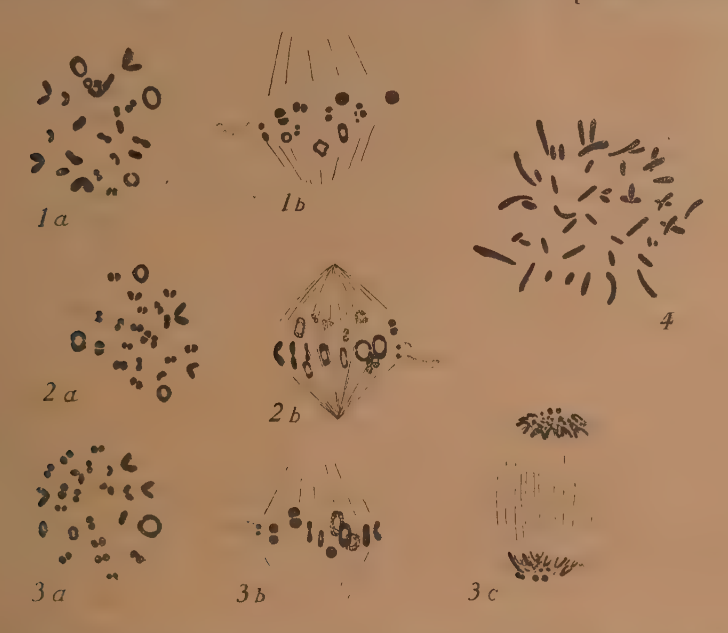
Afin d'essayer de réduire ces divergences, j'ai repris l'étude des chromosomes du Mulot : *Apodemus sylvaticus*. Mon matériel a été récolté à Vabre (Tarn), fixé et coloré suivant la méthode préconisée par Matthey.

Je retrouve le type XY, interprétation confirmée par un nombre diploïde

de 48 éléments, observé dans les cinèses goniales (*fig.* 4). Mais, fait intéressant et non encore signalé, j'observe que *ce complexe sexuel peut se présenter sous trois aspects différents.*

Dans les plaques équatoriales de la première division on trouve en effet un complexe sexuel XY affectant trois formes différentes :

Premier cas. — Le complexe sexuel est représenté par deux hétérochromosomes très différents : l'un est réduit à un élément punctiforme se colorant fortement, l'autre est constitué par une partie foncée et par un filament clair (*fig.* 1).



Deuxième cas. — Il est formé par deux chromosomes de longueurs différentes, chacun comprenant une partie foncée et une partie claire (*fig.* 2).

Troisième cas. — Les deux chromosomes sont morphologiquement identiques, formés chacun d'une partie basale intensément colorée et d'un filament pâle (*fig.* 3).

J'interprète ce système sexuel en admettant que la partie punctiforme très colorée par l'hématoxyline correspond à l'Y et le reste c'est-à-dire le filament clair et sa partie colorée à l'X.

Le cas n° 1 représente donc un système XY normal.

L'explication des deux cas suivants est plus délicate et seule la théorie

de Koller et Darlington (1934) me permet pour le moment d'interpréter ces deux formes d'hétérochromosomes : j'admets qu'un chiasma s'est produit entre l'X et l'Y, suivi de l'échange de segments correspondants. Le point foncé de l'X et une partie du filament clair correspondraient à ce que Koller et Darlington ont appelé, dans le cas du Surmulot, le *Pairing Segment*, tandis que tout le reste de la partie claire de l'X serait l'homologue du *Differential Segment*.

Les chiasmata se produiraient entre l'X et l'Y au stade diplotène et leur position par rapport au point d'insertion des fibres du fuseau permettrait alors de comprendre la formation des trois types d'hétérochromosomes, les figures de la métaphase I correspondant à des hétérochromosomes dont les échanges sont complètement terminés.

Dans la suite de la division, on assiste soit à une séparation des deux nouveaux constituants du couple XY, soit à une division équationnelle de l'ensemble XY dans le cas n° 1.

Si la théorie de Darlington s'applique ici, il y a donc préréduction partielle pour les cas 2 et 3, et dans le n° 1 soit préréduction totale, soit postréduction.

Ainsi les trois types de chiasma prévus par Koller et Darlington se trouveraient ici réalisés, avec une fréquence à peu près égale, entraînant une première cinèse équationnelle, ou partiellement réductionnelle, la spécialisation de la première division dans le sens réductionnel n'ayant pas encore eu lieu. Le Mulot constituerait à ce point de vue un type primitif, dans lequel le mode de séparation des hétérochromosomes peut encore se faire suivant l'un quelconque des trois systèmes.

Chez les autres Muridés, qui seraient à ce point de vue plus évolués, le mode de séparation de l'X et de l'Y est au contraire parfaitement déterminé; le cas n° 1 est devenu prédominant et ce n'est qu'exceptionnellement que des chiasmata d'un autre type lient les hétérochromosomes au cours de la phase synaptique; le mode de division préréductionnel est la règle, les autres constituent des exceptions.

Seule une étude précise de la prophase de la méiose chez le mâle et de la garniture sexuelle de la femelle, permettra d'infirmer ou de confirmer ces hypothèses. Ce polymorphisme des hétérochromosomes du Mulot mâle et leur comportement particulier n'en constitue pas moins un cas intéressant, digne d'être signalé dès à présent.

HISTOLOGIE. — *Des caractéristiques architecturales du cœur chez deux Lamellibranches marins :* Ostrea edulis *L. et* Venus gallina *L.* Note de MM. **Robert Brunet** et **Antoine Jullien**, présentée par M. Félix Mesnil.

Les recherches de l'un de nous, faites sur *Helix pomatia* L., en collaboration avec H. Cardot et Hélène Vairel-Blanc, ont précisé les rapports existant entre certaines fonctions du cœur et son architecture et ont montré combien il était important de définir cette dernière avant d'étudier l'automatisme des différentes régions du myocarde et la propagation de la contraction. C'est à ce travail préliminaire que nous nous sommes livrés sur quelques Lamellibranches et Gastropodes choisis parmi les plus faciles à se procurer vivants et susceptibles de fournir du matériel pour l'expérimentation physiologique. Nous rappelons que notre méthode consiste à examiner par transparence, à la loupe binoculaire, des ventricules ou des oreillettes montés sur de fines canules et à l'intérieur desquelles on a poussé une solution tiède de gélatine qui, en se prenant en gelée, maintient la préparation au degré de dilatation optimum.

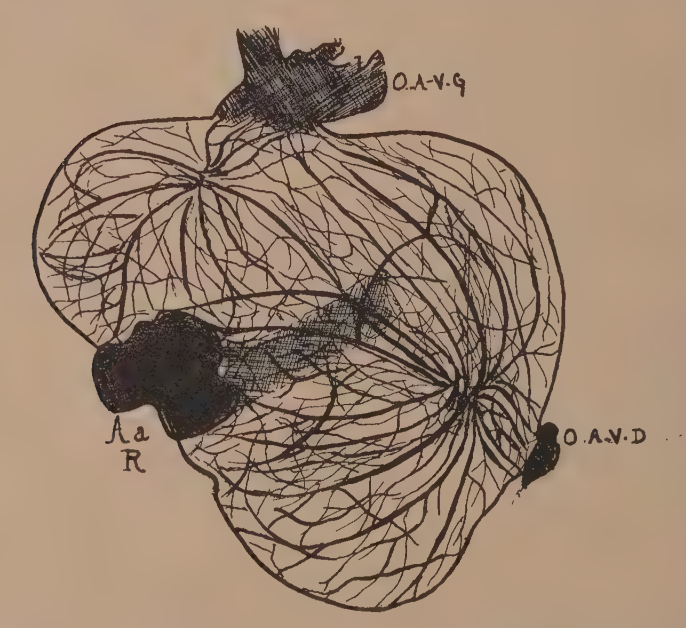
Chez *Ostrea edulis* L., les travées ventriculaires forment deux amas partant des abords de chaque orifice auriculo-ventriculaire et donnant naissance, à mesure qu'on s'éloigne de leur point d'origine, à des ramifications flexueuses irrégulièrement élargies, anastomosées en un réticulum à larges mailles, d'ailleurs plus serré sur la face dorsale que sur la face ventrale. En outre deux faisceaux de fines travées parallèles sont tendues entre l'aorte et la base du ventricule (à égale distance des jonctions auriculo-ventriculaires). De chacun d'eux se détachent à angle droit un ou deux piliers qui, après avoir traversé le ventricule dans toute sa largeur, vont, en quelques courtes ramifications, s'épanouir sur la face opposée.

Le réticulum auriculaire, dont l'observation est gênée par la présence de nombreuses cellules péricardiques, est à mailles étroites, sans systématisation des travées sauf pour quelques-unes émanant du point d'abouchement de la veine branchiale et dont les branches de divisions successives deviennent progressivement partie intégrante du réseau.

Chez *Venus gallina* L., la charpente ventriculaire est constituée par des travées longues et puissantes rayonnant comme les méridiens d'une sphère à partir de pôles disposés de part et d'autre et à une certaine distance de chaque orifice auriculo-ventriculaire (O. A.-V. G. et O. A.-V. D.). Il en

existe deux par face. De chacun de ces points, les travées s'irradient dans cinq directions principales : vers l'orifice auriculo-ventriculaire le plus rapproché qu'elles entourent de leurs ramifications; ce sont les plus courtes; vers l'orifice auriculo-ventriculaire opposé et vers le pôle de l'autre système méridien de la même face; vers l'aorte antérieure Aa et enfin un certain nombre, à grand rayon de courbure, passent sur la face opposée où elles vont s'anastomoser avec celles du système correspondant.

La mince paroi de l'oreillette est soutenue par un réseau de très fines travées à mailles lâches, relativement peu nombreuses et par quelques travées plus larges, aplaties, rameuses, à direction longitudinale qui joignent le sommet à la base. On note aussi la présence remarquable de piliers qui se détachent près du sommet et traversent obliquement la cavité auricu-



Ventricule de *Venus gallina* L. — O. A.-V. G. : orifice auriculo-ventriculaire gauche; O. A.-V. D. : orifice auriculo-ventriculaire droit; Aa R : aorte antérieure et rectum.

laire; ils se dichotomisent et les branches de division vont se fondre dans le réticulum de la paroi.

En résumé, on observe une systématisation très poussée des travées dans le ventricule de *Venus*, moins marquée chez *Ostrea*, des travées denses et puissantes chez la première, moins nombreuses et au tracé plus flou chez la deuxième; enfin, la présence remarquable de piliers dans le ventricule

d'*Ostrea edulis* et l'oreillette de *Venus gallina*. Chez cette espèce la position des points de convergence dans le ventricule laisse prévoir un certain décalage des régions les plus automatiques par rapport aux zones de jonction auriculo-ventriculaires.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Présence de l'allantoïnase chez les Insectes.* Note de Mlle **Marie-Louise Rocco**, présentée par M. Richard Fosse.

L'enzyme allantoïnase, découvert par R. Fosse et A. Brunel [1] dans la graine de *Soja hispida* et dans de nombreuses Légumineuses, a été signalé ensuite par ces mêmes auteurs dans le règne animal chez les Crustacés, les Poissons, les Batraciens.

Nous nous sommes proposé de rechercher son existence chez les Arthropodes aériens.

L'allantoïnase transforme l'allantoïne en acide allantoïque par fixation d'une molécule d'eau :

$$\begin{array}{ccc} NH^2 & CO - & NH \\ | & | & | \\ CO & & CO \\ | & | & | \\ NH - & CH - & NH \end{array} \xrightarrow[+H^2O]{\text{Allantoïnase}} \begin{array}{ccc} NH^2 & & NH^2 \\ | & & | \\ CO & COOH & CO \\ | & | & | \\ NH - & CH - & NH \end{array}$$

L'acide allantoïque peut être caractérisé après hydrolyse acide, par ses produits de désintégration : l'urée et l'acide glyoxylique

$$\begin{matrix} H^2N.CO.NH \\ H^2N.CO.NH \end{matrix}\!\!>\!CH.COOH \xrightarrow{+H^2O} 2\ OC\!<\!\!\begin{matrix} NH^2 \\ NH^2 \end{matrix} + \begin{matrix} CHO \\ | \\ COOH \end{matrix}.$$

Dans nos expériences, nous avons mis en évidence l'acide glyoxylique par sa très sensible réaction colorée phénylhydrazinique [2].

Mode opératoire. — Placer 2 minutes au bain d'eau bouillante, en tube à essai :

Solution d'acide allantoïque .... 2^{cm^3}

Solution de chlorhydrate de phénylhydrazine à 1 pour 100 .... $0^{cm^3},1$ (2 gouttes)

puis, après refroidissement rapide, ajouter :

Acide chlorhydrique concentré pur .... $1^{cm^3},2$

Solution de ferricyanure de potassium à 5 pour 100 .... $0^{cm^3},1$ (2 gouttes)

Recherche qualitative de l'allantoïnase chez les Insectes. — Tous les essais sont faits sur des parties aliquotes d'une macération aqueuse au 1/10e de l'insecte broyé au mortier.

---

(1) *Comptes rendus*, **188**, 1929, p. 426.

(2) R. Fosse et A. Hieulle, *Comptes rendus*, **179**, 1924, p. 636.

Mode opératoire :

	E.	T.
Solution d'allantoïne à 1 pour 1000 fraîchement préparée..	5^{cm^3}	5^{cm^3}
Macération aqueuse d'insecte..........................	2^{cm^3}	–
Même macération portée à 100° pendant 30 minutes pour détruire les enzymes..............................	–	2^{cm^3}
Toluène..	5 gouttes	5 gouttes

Les expériences E et T sont placées au bain d'eau à 39-40°; après un certain temps, une demi-heure en général, l'acide allantoïque est recherché sur 2^{cm^3} des deux liqueurs.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

Familles.	Espèces étudiées.	Provenance.	Recherche de l'allantoïnase
Carabidæ......	*Carabus violaceus purpurascens* L...	France	+
»......	» *problematicus*............	»	+
»......	» *intricatus* L.............	»	+
»......	» *hispanis* F...............	»	+
»......	» *splendens*. F.............	»	+
»......	» *auronitens* F.............	»	+
»......	» *festivus* Dej.............	»	+
»......	» *auratus* L................	»	+
»......	*Cychrus rostratus* L.............	»	+
»......	*Scarites striatus*................	Algérie	
»......	*Anthia sexmaculata*..............	»	+
»......	*Abax Ater* Vill..................	France	+
Dysticidæ......	*Dytiscus marginalis* L...........	»	+
»......	*Cybister laterimarginalis* Dej....	»	+
»......	*Acilius sulcatus* L..............	»	+
Hydrophilidæ...	*Hydrophilus piceus* L............	»	—
»...	*Hydrous caraboides*..............	»	+
Silphini........	*Phosphuga atrata* L..............	»	+
Tenebrionidæ....	*Pimelia obesa*...................	Algérie	
»...	*Blaps nitens*....................	»	—
»...	» *gigas* L......................	»	—
Cerambycidæ...	*Cerambyx scopolii* F.............	France	
»...	*Rhagium sycophanta* L............	»	+
Orthoptères.....	*Schistocerca gregaria* adulte.......	Algérie	+
».....	— larve (4e stade solitaire).......	»	+
».....	— larve (6e stade solitaire).......	»	+

Les Insectes étudiés ont été déterminés par M. Colas du laboratoire d'Entomologie de M. Jeannel.

Le témoin T donne parfois une réaction colorée positive, mais cette dernière n'est pas due à une action fermentaire; nous avons constaté en effet qu'elle était donnée par un certain nombre de macérations primitives d'insectes.

Ce résultat semble indiquer la présence de l'acide allantoïque dans ces macérations; nous faisons toutes réserves à ce sujet, nous proposant de chercher à vérifier cette hypothèse par de nouvelles expériences.

Conclusion. — Les Arthropodes aériens, comme les Arthropodes aquatiques, renferment l'enzyme hydrolysant l'allantoïne : l'allantoïnase.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Isolement d'un principe hypoglycémiant dans la muqueuse jéjunale.* Note de MM. **Francis Rathery**, **André Choay** et **Pierre de Traverse**, présentée par M. Alexandre Desgrez.

Partant de ce fait que le taux de la glycémie du sang porte est toujours plus bas que celui des glycémies de tous les autres vaisseaux de l'organisme, nous avons pensé qu'il devait exister dans la paroi intestinale un principe hypoglycémiant.

Un certain nombre d'auteurs ont étudié l'action de la muqueuse duodénale et de la sécrétine sur le métabolisme glucidique, soit en utilisant la sécrétine purifiée, soit en faisant pénétrer de l'acide chlorhydrique dans le duodénum, soit enfin en se servant d'extraits duodénaux (Takacs-Zunz et La Barre, etc.); mais toutes ces recherches, et nous insistons sur ce fait, avaient trait à la muqueuse duodénale ou à la sécrétine. Seul Takacs emploie un mélange de duodénum et de jéjunum. Dans ces travaux, les auteurs, discutant les rapports du produit obtenu avec l'insuline, semblent tous admettre que l'effet hypoglycémiant obtenu, qui n'est ni constant ni souvent très marqué, résulte d'une excitation élective de la sécrétion pancréatique insulinienne.

Nos recherches partent d'une autre idée directrice. Nous avons exclu d'une façon constante tout le duodénum et nous avons cherché si l'intestin grêle ne possédait pas, en dehors de la muqueuse duodénale, une action propre sur le métabolisme glucidique. Nous sommes arrivés à isoler un produit doué d'une activité non douteuse sur la glycémie qu'il abaisse fortement. Nous nous bornerons à indiquer la technique d'isolement et les essais physiologiques démontrant les propriétés hypoglycémiantes de la substance obtenue.

Technique d'isolement. — La masse intestinale de six bœufs comprenant le seul jéjunum est recueillie. On gratte la muqueuse en même temps qu'une portion de la musculeuse. Le poids de la pulpe ainsi obtenue est de $4^{kg},640$. Cette pulpe est épuisée à froid par macérations successives avec de l'alcool à 95° d'abord, puis à 65°, de telle façon que la masse finale présente un titre alcoolique compris entre 60 et 65°. Chaque macération est additionnée de CO^3NaH suivant la méthode de Dudley et Starling; on distille l'alcool sous pression réduite après sursaturation acétique. On concentre le liquide à un volume connu et on partage en deux portions A et B.

Traitement de la portion A (correspondant à $2^{kg},320$ de pulpe jéjunale). —

a. Précipitation fractionnée en deux temps par l'alcool, amenant le titre à 80° puis 92°, suivant la technique classique pour l'insuline. On a recueilli 5^{g} de produit brut.

Essais physiologiques. — On a fait à 2 lapins de 2^{kg} une injection sous-cutanée de $0^{g},025$ du produit. On obtient une chute glycémique de 35 à 47 pour 100 sans convulsions.

b. On a purifié le produit par dissolution dans l'eau acidulée, précipitation picrique, reprise par l'ammoniaque et reprécipitation acétonique. On recueille ainsi $0^{g},30$ de produit.

Essais physiologiques. — On a injecté à 3 lapins $0^{g},01$ ou $0^{g},02$ du produit. La chute glycémique obtenue est de 65 et 75 pour 100; l'un des animaux présente des convulsions 2 heures après l'injection.

Traitement de la portion B correspondant à $2^{kg},320$ de pulpe jéjunale. On précipite par addition au liquide préalablement acidulé un volume égal de solution saturée de sulfate d'ammonium. Le précipité recueilli et dissous dans une grande quantité d'eau distillée est reprécipité par l'acide picrique; ce précipité est dissous dans l'ammoniaque et on reprécipite par l'acétone. On recueille 1^{g} de produit B.

Essais physiologiques. — On a injecté à 1 lapin de $2^{kg},550$, sous la peau, $0^{g},025$ du produit. La glycémie tombe de 1,04 à 0,35, soit une chute de 66 pour 100; l'animal a été pris de convulsions violentes 2 heures et demie après l'injection.

A 1 autre lapin de 2^{kg} on a injecté sous la peau $0^{g},020$; la glycémie tombe de 1,08 à 0,53, soit une chute de 51 pour 100.

Conclusions. — On peut extraire de la muqueuse jéjunale du bœuf un produit hypoglycémiant qui se présente sous forme d'une poudre blanche soluble dans l'eau. Ce produit est de 30 à 40 unités internationales par kilogramme de pulpe. Il détermine chez le lapin normal une chute de la glycémie qui peut atteindre 75 pour 100 et déterminer des convulsions.

SÉROLOGIE. — *Contribution à l'étude des propriétés alexiques de la protéine* C. Note de M. **Maurice Doladilhe** et de Mlle **Marguerite Michel**, présentée par M. Félix Mesnil.

L'un de nous a montré (¹) que la fraction de la globuline, qui possède la propriété du chaînon central de l'alexine, contient une protéine : la protéine C, dont les propriétés physiques évoluent au sein du sérum sous

(¹) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 1385.

l'influence du vieillissement ou du chauffage. Ces résultats nous ont amené à rechercher si cette protéine intervient dans l'action complémentaire.

Pour mettre en évidence cette intervention, nous avons eu recours à l'hémolyse alexique et nous avons utilisé comme source d'alexine, soit le sérum de cobaye, soit le sérum humain. Nous avons opéré de la façon suivante : on porte à l'étuve à 37° des mélanges constitués chacun par un volume v de sérum alexique, v_1 d'une suspension isotonique de globules rouges sensibilisés et des volumes croissants d'une suspension dans de l'eau physiologique de protéine C; chaque mélange est complété au même volume total V par du NaCl à 8,5 pour 1000.

Nous avons constaté que la protéine C, issue d'un *sérum étranger* ou d'un *sérum homologue* à celui qui constitue la source alexique, exerce toujours une influence sur l'hémolyse.

Cette influence qui, toutes conditions égales d'ailleurs, est d'autant plus nette qu'est plus élevée la quantité de la protéine C ajoutée au mélange, se traduit par une accélération ou par un retard, en général très notables, de l'hémolyse; souvent même on observe la suppression totale du phénomène.

La protéine C exerce donc, suivant les cas, soit une action favorable, soit une action inhibitrice.

Nous avons pu établir que le sens de cette action dépend, en premier lieu, de l'histoire antérieure du sérum dont a été tirée la protéine C; celle-ci se présente avec ses propriétés favorisantes si ce sérum est frais et elle est anticomplémentaire s'il a subi un certain vieillissement.

Le vieillissement de la protéine C, une fois séparée du sérum et conservée stérilement, exerce une influence dépressive sur son pouvoir favorisant et augmente toujours son pouvoir anticomplémentaire.

Le chauffage préalable de cette protéine exerce au contraire une influence dépressive sur ces deux propriétés à la fois, en sorte que la protéine C, chauffée à une température donnée et pendant une durée suffisante, ne modifie plus l'évolution de l'hémolyse alexique.

$$v = 0^{cm^3},5; \quad v_1 = 0^{cm^3},5; \quad V = 3^{cm^3}.$$

a = volume de suspension isotonique de protéine C, ajouté aux mélanges.

TABLEAU I.

	Protéine C provenant d'un sérum.							Protéine C chauffée à 57° pendant 15 minutes.	
	Frais.				Vieux (conservé 6 jours).				
a	0.	0,1.	0,3.	0,5.	0,1.	0,3.	0,5.	0,1.	0,3.
Durée totale de l'hémolyse...	70′	55′	25′	12′	110′	pas d'hém.		70′	75′

Le Tableau I donne un exemple des différences observées; la source d'alexine est constituée par du sérum de cobaye (dilué 100 fois par de l'eau physiologique), la protéine C est tirée d'un sérum étranger (sérum humain).

Le Tableau II donne un exemple des résultats obtenus lorsque la protéine C est tirée d'un sérum homologue à celui qui constitue la source d'alexine :

Source d'alexine : sérum humain.

Protéine C tirée d'un sérum humain.

$v = 0^{cm^3},2$; $v_1 = 0^{cm^3},3$; $V = 3^{cm^3}$.

TABLEAU II.

	Protéine C provenant d'un sérum.							Protéine C chauffée à 56° pendant 15 minutes.	
	Frais.				Vieux (conservé 5 jours).				
a	0.	0,1.	0,3.	0,5.	0,1.	0,3.	0,5.	0,1.	0,3.
Durée totale de l'hémolyse...	50′	38′	17′	11′	105′	180′	pas d'hém.	52′	55′

Dans une seconde série d'expériences, nous avons utilisé une source incomplète d'alexine, constituée par un sérum frais privé entièrement de son acido-globuline (méthode au gaz carbonique) ([1]).

Cette fraction sérique, dans laquelle subsiste seule la propriété du chaînon terminal de l'alexine, ne possède plus le pouvoir hémolytique.

Or l'addition d'une protéine C tirée d'un sérum étranger ou homologue, ayant conservé ses propriétés favorisantes, suffit pour la réactiver.

Le pouvoir hémolytique du mélange ainsi constitué est, toutes conditions égales d'ailleurs, d'autant plus prononcé qu'est plus grande la quantité de la protéine C ajoutée.

Ces résultats montrent que la protéine C exerce une action sur le phénomène alexique. Cette action qui, suivant l'évolution de cette protéine, est soit favorisante, soit empêchante, s'observe également lorsque la protéine C est tirée d'un sérum *étranger* ou d'un sérum *homologue* à celui qui constitue la source d'alexine. Ces résultats font voir en outre que la propriété du chaînon central de l'alexine accompagne la protéine, même lorsqu'elle est séparée du sérum.

A $16^h 15^m$ l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à $16^h 45^m$. E. P.

([1]) *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 689.